

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
Направление «Физика»



**Кристаллические базисы для спиновых цепочек в AdS/CFT
соответствии**

Бакалаврская работа студента

Соловьёва Дмитрия Павловича

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., ст.преп. **Назаров А.А.**

Рецензент:
к.ф.-м.н., проф. **Арутюнов Г.Э.**

Санкт-Петербург
2018

Содержание

1	Введение	3
2	Кристаллические базисы	6
2.1	Алгебры Ли и их классификация	6
2.2	Корневая система алгебры Ли $su(3)$	12
2.3	Теория представлений алгебр Ли и тензорное произведение представлений	14
2.4	Квантовые группы	22
2.5	Кристаллические базисы	29
2.6	Разложение тензорного произведения представлений алгебры Ли $su(3)$	34
3	Спиновые цепочки и алгебраический анзац Бёте	40
3.1	Формализм Лакса	40
3.2	Уравнения Бёте и спектр трансфер-матрицы	44
3.3	Интегралы движения	46
4	Интегрируемость в соответствии $\mathcal{N} = 4$ SYM и теории струн в $AdS_5 \times S^5$	51
4.1	Необходимые понятия	51
4.2	Соответствие $\mathcal{N} = 4$ SYM и теории струн в $AdS_5 \times S^5$	57
4.3	Эквивалентность двухточечного коррелятора примарных операторов $\mathcal{N} = 4$ SYM скалярного сектора и Гамильтониана спиновой цепочки	65
4.4	Спектр энергий замкнутой струны в $AdS_5 \times S^5$	69
4.5	Проверка совпадения спектров в $su(3)$ подсекторе	70
4.6	Программная реализация для кристаллических базисов алгебры Ли $su(3)$	72
5	Заключение	79

1 Введение

Теория представлений играет колоссальную роль в современной теоретической физике и является неотъемлемой частью многих её направлений.

Рассмотрим две изолированные физические системы S_1 и S_2 , пространства состояний которых h_1 и h_2 . Эти две системы можно рассматривать независимо друг от друга. Если же эти системы взаимодействуют друг с другом, то необходимо рассмотреть их как одну систему, пространство состояний которой будет формировать конструкцию тензорного произведения $h_1 \otimes h_2$. Пускай нашей системой будут две взаимодействующие друг с другом частицы. В случае, если каждая из них обладает внутренней степенью свободы, например спином, то используя разложение тензорного произведения пространств представления алгебры симметрии, действующей на пространствах состояний этих частиц, на неприводимые, мы можем разложить состояния со многими степенями свободы на линейные комбинации произведений одночастичных состояний.

Одной из важнейших моделей квантовой механики и теории интегрируемых систем, для которой справедливо вышеизложенное, является интегрируемая квантовая спиновая цепочка. Пространство состояний данной системы является тензорным произведением пространств состояний узлов цепочки $\mathcal{H} = h_1 \otimes \dots \otimes h_N = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$. Гамильтониан спиновой цепочки имеет вид $\hat{H} = - \sum_{j=1}^N (J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) - h \sum_{j=1}^N \sigma_j^z$, где J — константы взаимодействия, и заданы граничные условия $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Рассмотрим задачу с точки зрения алгебраического подхода. На узлах цепочки действует фундаментальное представление sl_2 , а на всей цепочке — его тензорная степень.

Для нахождения количества собственных подпространств Гамильтониана спиновой цепочки, имеющих заданное значение спина, необходимо решить равносильную задачу разложения тензорного произведения представлений на неприводимые, а затем найти кратности неприводимых компонент. Гамильтониан спиновой цепочки с N узлами задан на тензорном произведении пространств состояний в узлах цепочки. В случае, когда он инвариантен относительно действия алгебры Ли \mathfrak{g} , а именно $[\hat{H}, x] = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, количество собственных подпространств, отвечающих одному и тому же собственному значению, совпадает с кратностью $Z(\lambda, N)$ в разложении пространства \mathcal{H} состояний системы в прямую сумму неприводимых модулей V^λ алгебры \mathfrak{g} : $\mathcal{H} = \bigoplus_\lambda Z(\lambda, N) V^\lambda$. Чтобы найти спектр энергий, необходимо диагонализировать Гамильтониан, что равносильно нахождению базиса пространства представления, в котором оно имеет вид прямой суммы инвариантных подпространств, каждое из которых соответствует своей неприводимой компоненте в разложении. Для решения этих задач в данной работе будет рассмотрен аппарат кристаллических базисов.

Кристаллические базисы задействуют формализм квантовых групп, который подробно рассмотрен в данной дипломной работе. Его использование оказывается очень эффективным при решении задачи разложения тензорного произведения представлений на неприводимые составляющие. Благодаря этому кристаллические базисы позволяют работать с обширным классом объектов, а именно, с модулями категории \mathcal{O}_{int} . Эта категория включает в себя интегрируемые весовые модули, имеющие конечный на-

бор конечномерных весовых подпространств. В их числе также содержатся модули, соответствующие представлениям алгебр Ли серий A_n , B_n , C_n , D_n . Кроме того, кристаллические базисы имеют очень простое поведение при рассмотрении большого количества компонент тензорного произведения представлений.

Упомянутые выше конструкции применяются в контексте интегрируемости в AdS/CFT соответствии. Одним из наиболее хорошо изученных примеров является соответствие между теорией $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричного Янга-Миллса и теорией струн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$. При изучении данного соответствия нам понадобится квантовая теория поля, теория струн, а также аппарат кристаллических базисов, приложенный к изучению интегрируемой спиновой цепочки.

Последовательность изложения материала в данном дипломе выглядит следующим образом. В главе 2 дано краткое введение в теорию алгебр Ли и их представлений. Затем описан аппарат квантовых групп, чтобы в дальнейшем перейти к кристаллическим базисам. Они, в свою очередь, будут использованы для разложения тензорного произведения представлений на неприводимые. Нами будут рассмотрены и проделаны конкретные вычисления с использованием кристаллических базисов на примере алгебры Ли $su(3)$.

В главе 3 будет дан пример интегрируемой системы, а именно, спиновой цепочки $XXX_{\frac{1}{2}}$ с алгеброй симметрии sl_2 , решение задачи на нахождение собственных функций и спектра которой с точки зрения алгебраического подхода эквивалентно разложению тензорных степеней представлений на неприводимые. Изначально разработанный для этого подход, использующий алгебраический анзац Бёте, не всегда рационален, особенно при рассмотрении большой тензорной степени и другой алгебры симметрии, так как построение соответствующих уравнений и их решение является нетривиальной задачей. Модификации спиновой цепочки такого рода возникают в теории $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричного Янга-Миллса, о чём более подробно сказано в следующей главе.

Для вычисления спектра аномальных размерностей односледовых скалярных операторов в однопетлевом приближении необходимо рассмотреть двухточечный коррелятор оператора с самим собой. Было показано [30], что он имеет вид, схожий с гамильтонианом спиновой цепочки, однако при этом нам будет необходимо рассматривать другую алгебру симметрий. В главе 4 для вычисления аномальных размерностей в подсекторе $su(3)$ будет использован аппарат кристаллических базисов. В контексте AdS/CFT соответствия, теория $\mathcal{N} = 4$ SYM дуальна, как уже было сказано, теории струн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$, а спектр аномальных размерностей этого подсектора соответствует энергетическому спектру струны, вращающейся с угловым моментом (J_1, J_2, J_3) в S^5 , где суммарный угловой момент зависит от длины рассматриваемой спиновой цепочки. Так как вычисления подразумевают рассмотрение большого суммарного углового момента струны, то необходимо рассматривать большие степени тензорного произведения представлений. В данном дипломе нами будет предложен алгоритм решения задачи разложения на неприводимые представления с помощью кристаллических базисов, а также его программная реализация в системе MATLAB. Рассмотрев дуальность со стороны теории струн, мы опишем способ вычисления спектра энергий, а также их пересчёта в спектр

аномальных размерностей односледовых скалярных операторов. Таким образом будет описан алгоритм проведения проверки соответствия между теорией $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричного Янга-Миллса и теорией струн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$, а программная реализация послужит инструментом для выполнения одного из шагов этой проверки.

2 Кристаллические базисы

2.1 Алгебры Ли и их классификация

В этом параграфе мы как можно более кратко и без доказательств изложим теорию алгебр Ли и их классификацию. Необходимость в этом возникает ввиду того, что в дальнейшем мы будем ссылаться на понятия, что будут изложены ниже. Повествование будет вестись в согласии с монографиями [2] и [3].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{g} = L(\mathbb{F})$ – векторное пространство над полем \mathbb{F} нулевой характеристики, с введённой операцией $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, называемой скобкой или коммутатором элементов. Оно называется алгеброй Ли над полем \mathbb{F} , если выполняются следующие аксиомы:

1. операция коммутирования билинейна;
2. $[x, x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$;
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Введём понятие представления алгебры Ли.

Определение 2. Линейным представлением алгебры Ли \mathfrak{g} в векторном пространстве V называется отображение $R : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$, являющееся гомоморфизмом, то есть отвечающее требованиям $R([x, y]) = [R(x), R(y)]$ и $R(ax + by) = aR(x) + bR(y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Для классификации алгебр Ли нам понадобится присоединённое представление.

Определение 3. Представление $ad : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ действующее по правилу $x \mapsto [x, \cdot]$ называется присоединённым.

Определение 4. Формой Киллинга называется форма $K(x, y) = Tr(ad_x ad_y)$.

Определение 5. Алгебра Ли \mathfrak{g} называется полупростой, если она не содержит нетривиальных разрешимых идеалов. Идеал назовём разрешимым, если последовательность $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}]$, \dots , $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$ завершается $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ при некотором конечном n . Максимальный разрешимый идеал алгебры называется радикалом и обозначается как $Rad \mathfrak{g}$.

Рассмотрим произвольную алгебру Ли. Выделим в ней радикал $Rad \mathfrak{g} = S$. Он будет являться полупростой подалгеброй Ли исходной алгебры. Ортогональное дополнение S^\perp по форме Киллинга K будет удовлетворять свойству $S \oplus S^\perp \simeq \mathfrak{g}$, а также будет являться идеалом исходной алгебры. Доказательство этого факта есть в книге [2], раздел 5.1.11. Таким образом мы имеем возможность свести весь анализ алгебр Ли к анализу полупростых.

Определение 6. Алгебра Ли \mathfrak{g} называется простой, если в ней не существует нетривиальных идеалов.

Пусть алгебра Ли является полупростой. Тогда её можно разложить в прямую сумму простых идеалов, которые, в свою очередь, будут являться простыми подалгебрами исходной алгебры Ли. Доказательство изложено в книге [2], раздел 5.5.5. Простые алгебры Ли полностью классифицированы, что будет показано ниже. Напомним некоторые сведения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Далее \mathfrak{g} — простая алгебра Ли, если не оговорено обратное.

Определение 7. Рассмотрим присоединённое представление \mathfrak{g} . Сопоставим всякому присоединённому оператору ad_x , где $x \in \mathfrak{g}$, его характеристический полином.

$$P_x(\lambda) = \det(\lambda I - ad_x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k c_k(x) \quad (1)$$

Наименьший номер k функции $c_k(x)$ не равной нулю тождественно для всех построенных операторов присоединённого представления назовём рангом алгебры \mathfrak{g} . Очевидно, что достаточно построить характеристические многочлены лишь на базисных элементах. Пусть ранг нашей алгебры равен r . Вектор $x \in \mathfrak{g}$ называется регулярным, если для него наша функция $c_r(x) \neq 0$. Очевидно, что любая линейная комбинация векторов, содержащая регулярный, тоже будет регулярным вектором.

Определение 8. Максимальная коммутативная подалгебра \mathfrak{h} алгебры Ли \mathfrak{g} , содержащая регулярный элемент называется подалгеброй Картана.

Итак, пусть \mathfrak{h} подалгебра Картана алгебры \mathfrak{g} . Размерность подалгебры Картана совпадает с рангом алгебры \mathfrak{g} . Все операторы ad_h являются полупростыми и коммутирующими, а значит мы имеем полный набор собственных векторов ([3] 3.7.1), в базисе которых они все одновременно диагонализуются. Значит существует базис алгебры \mathfrak{g} , состоящий из элементов X_1, \dots, X_n такой, что для всякого $h \in \mathfrak{h}$ имеем

$$ad_h(X_i) = [h, X_i] = \beta_i(h)X_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

Собственные значения $\beta_i(h)$ являются линейными формами на подалгебре \mathfrak{h} и называются корнями. Ясно, что если a — корень, то $-a$ тоже корень. Заметим, что сам базис \mathfrak{g} содержит в себе в качестве подмножества базис \mathfrak{h} , на котором корни обращаются в ноль из коммутирования элементов. Обозначим $\mathfrak{g}_h^{\beta_i(h)}$ подпространство \mathfrak{g} , состоящее из таких элементов, которые обращаются в ноль при действии на них достаточно большой целой и неотрицательной степени p оператора $(ad_h - \beta_i(h))^p$. Тогда из структуры нормальной формы матрицы ad_h становится очевидно, что

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\beta_i(h)} \mathfrak{g}_h^{\beta_i(h)} \quad (3)$$

где $\beta_i(h) \in \text{Spec}(ad_h)$ и $\mathfrak{g}_h^0 = \mathfrak{h}$. Подпространства $\mathfrak{g}_h^{\beta_i(h)}$ называются нильпространствами оператора $(ad_h - \beta_i(h))$, а полученное разложение — разложением Картана.

Далее, пускай X_1, \dots, X_n базис \mathfrak{g} , в котором все операторы ad_h диагональны. Пусть для определённости первые r векторов образуют базис подалгебры Картана. Всякому базисному элементу X_i соответствует r собственных значений операторов ad_{X_i} . Таким образом, всякой простой алгебре Ли можно сопоставить набор, состоящий из n r -мерных векторов, взаимное расположение и относительные длины которых определяют структуру нашей простой алгебры Ли. Итак, имеем $ad_{X_i}(X_j) = \beta_j(X_i)X_j$, где наш вектор будет иметь компоненты $\beta_j = \{\beta_j(X_i)\}$, $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, n$. Утверждается, что набор векторов β_j , где $j = r+1, \dots, n$ является приведённой неприводимой корневой системой ([4] с. 306).

Определение 9. Корневой системой R пространства V называется набор векторов, удовлетворяющих условиям:

1. $s_r R = R, \forall r \in R$;
2. $s_r b = b + mb, \forall a, b \in R, \forall m \in \mathbb{Z}$;
3. Линейная оболочка R совпадает с V ;
4. $0 \notin R$;

где $s_r(v) = v - \frac{2(r,v)}{(r,r)}v$ — оператор отражения, связанный с вектором r .

Множество векторов, инвариантных относительно такого оператора отражения, образует гиперплоскость, перпендикулярную вектору, с которым связан оператор. В роли векторов корневой системы будут выступать корни. С учётом этого и свойств самих корней напомним разложение Картана-Вейля, которое является модификацией разложения Картана:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\beta} \mathfrak{g}^{\beta} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta} \right) \quad (4)$$

Основываясь на вышеописанном, можно сформулировать теорему Вейля, которая помогает восстановить структуру алгебры Ли по корневой системе.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{g} — линейное векторное пространство,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\beta} \mathfrak{g}^{\beta} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta} \right) \quad (5)$$

сопоставляемое приведенной неприводимой системе R размерности $r = \dim \mathfrak{h}$. Каждому базисному корню β_i сопоставим тройку $\{H_i, X_i, Y_i\}$ в пространстве $H_i \oplus \mathfrak{g}^{\beta_i} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta_i}$. Тогда следующие композиции однозначно определяют простую алгебру Ли \mathfrak{g} :

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij}^i H_i, \quad [H_i, X_j] = a_{ij} X_j, \quad [H_i, Y_j] = -a_{ij} Y_j \quad (6)$$

для $i, j = 1, \dots, r$,

$$(ad_{X_i})^{(1-a_{ij})} X_j = 0, \quad (ad_{Y_i})^{(1-a_{ij})} Y_j = 0 \quad (7)$$

для $i \neq j$. И наконец

$$X_{\beta} = (ad_{X_r})^{c_r} \dots (ad_{X_3})^{c_3} (ad_{X_2})^{c_2-1} (ad_{X_1})^{c_1} X_2, \quad \beta = \sum c^i \beta_i \quad (8)$$

$$[X_{\beta}, Y_{\beta}] = H_{\beta}, \quad [H_{\beta}, X_{\beta}] = 2X_{\beta}, \quad [H_{\beta}, Y_{\beta}] = -2Y_{\beta},$$

где

$$a_{ij} = \frac{2(\beta_i, \beta_j)}{(\beta_i, \beta_i)}, \quad (9)$$

а β_i — базисные корни.

Доказательство теоремы приведено в книге [6], с. 356. Множители a_{ij} образуют матрицу Картана. Введём понятие обобщённой матрицы Картана, которая содержит в себе информацию о простой алгебре Ли. Она, в свою очередь, может быть закодирована диаграммой Дынкина. Таким образом мы получим классификацию простых алгебр Ли.

Определение 10. Матрица $A = (a_{ij})$ называется обобщённой матрицей Картана, если она удовлетворяет условиям:

1. $a_{ii} = 2$;
2. $a_{ij} \leq 0$ если $i \neq j$;
3. $a_{ij} = 0$ если и только если $a_{ji} = 0$.

Матрица будет квадратной, её размер будет равен рангу алгебры \mathfrak{g} , она будет состоять из целых чисел. В случае полупростых алгебр Ли она положительно определена. Имея матрицу Картана мы можем воссоздать корневую систему по изложенным в таблице 1 правилам. Каждой корневой

a_{ij}	a_{ji}	φ	$ \beta_i \div \beta_j $
0	0	$\frac{\pi}{2}$	\forall
1	1	$\frac{\pi}{3}$	$ \beta_i = \beta_j $
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	$ \beta_i = \beta_j $
2	1	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2} \beta_i = \beta_j $
-2	-1	$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2} \beta_i = \beta_j $
3	1	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3} \beta_i = \beta_j $
-3	-1	$\frac{5\pi}{6}$	$\sqrt{3} \beta_i = \beta_j $

Таблица 1: Таблица связи элементов матрицы Картана с углами между корневыми подпространствами

системе мы можем сопоставить схему Дынкина. В узлах графа находятся корни, по которым восстанавливается вся система. В зависимости от внутреннего угла между корнями, скажем, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ узлы могут быть соединены разным числом линий: 0, 1, 2, 3. Если два узла соединены n линиями, то отношения их длин составляет $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Стрелка указывает на более короткий корень. Иногда вместо этого внутри узлов могут быть написаны некоторые целочисленные значения. В первом узле обязательно 1, а затем они определяются формулой

$$a_{ij}a_{ji} = 4 \cos^2 \varphi \quad (10)$$

Более того, утверждается, что всякая непустая связная схема Дынкина изоморфна одной из приведённых в рисунке 1. Доказательство можно найти в книге [5], с. 520.

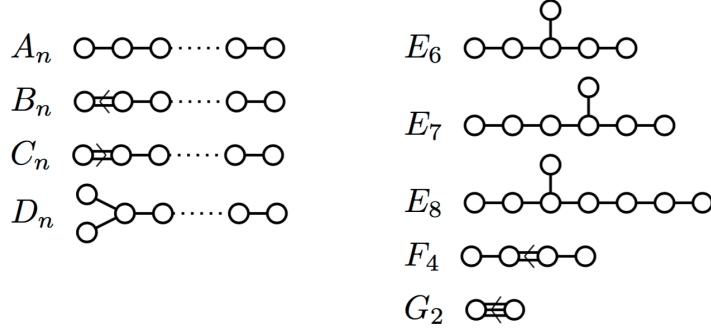


Рис. 1: Классификация схем Дынкина

Помимо этого, каждой из схем и, соответственно, классических простых алгебр соответствует её каноническая реализация. Опишем её таблицей 2. Для пяти исключительных простых алгебр Ли и изоморфных им такого соответствия не построить, так как они не задаются условиями сохранения билинейной (полуторалинейной) формы. Также стоит сказать, что всякая простая вещественная алгебра Ли является вещественной формой либо овеществлением комплексной простой алгебры Ли, что тоже отражено в этой таблице. Помимо этого, у любой простой комплексной алгебры Ли существует компактная вещественная форма. Доказательства этих фактов изложены в [2], разделы 5.6.63 и 5.6.65.

Серия	Каноническая реализация	Овеществления и вещественные формы	Компактные вещественные формы
A_n $n \geq 1$	$sl(n+1, \mathbb{C})$	$sl(n+1, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$su(n+1)$
		$sl(n+1, \mathbb{R})$	
		$su(p, q), p+q = n+1$	
		$su^{\sharp}(p, q), n+1 = 2k$	
B_n $n \geq 2$	$so(2n+1, \mathbb{C})$	$so(2n+1, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$so(2n+1)$
		$so(p, q), p+q = 2n+1$	
C_n $n \geq 3$	$sp(n, \mathbb{C})$	$sp(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$sp(n)$
		$sp(n, \mathbb{R})$	
		$sp(p, q), p+q = 2n$	
D_n $n \geq 4$	$so(2n, \mathbb{C})$	$so(2n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$so(2n)$
		$so(p, q), p+q = 2n$	
		$so^{\sharp}(2n)$	

Таблица 2: Таблица связи канонических реализаций с овеществлениями

Предоставим перечень эквивалентных схем Дынкина, которые будут задавать изоморфизмы комплексных алгебр в таблице 3.

Эквивалентные схемы Дынкина и изоморфизмы комплексных алгебр	Изоморфизмы вещественных форм и оветствлений
$A_1 \simeq B_1 \simeq C_1$ $sl(2, \mathbb{C}) \simeq so(3, \mathbb{C}) \simeq sp(1, \mathbb{C})$	$su(2) \simeq so(3, \mathbb{R}) \simeq sp(1)$ $sl(2, \mathbb{R}) \simeq su(1, 1) \simeq so(2, 1) \simeq sp(1, \mathbb{R})$
$B_2 \simeq C_2$ $so(5, \mathbb{C}) \simeq sp(2, \mathbb{C})$	$so(5, \mathbb{R}) \simeq sp(2)$ $so(3, 2) \simeq sp(2, \mathbb{R})$ $so(4, 1) \simeq sp(1, 1)$
$D_2 \simeq A_1 \oplus A_1$ $so(4, \mathbb{C}) \simeq sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$	$so(4, \mathbb{R}) \simeq so(3, \mathbb{R}) \oplus so(3, \mathbb{R})$ $so(2, 2) \simeq sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$ $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \simeq sp(3, 1)$ $so^{\#}(4) \simeq sl(2, \mathbb{R}) \oplus su(2)$
$A_3 \simeq D_3$ $sl(4, \mathbb{C}) \simeq so(6, \mathbb{C})$	$su(4) \simeq so(6, \mathbb{R})$ $sl(4, \mathbb{R}) \simeq so(3, 3)$ $su(2, 2) \simeq so(4, 2)$ $su(3, 1) \simeq so^{\#}(6)$ $su^{\#}(4) \simeq so(5, 1)$ $so^{\#}(8) \simeq so(6, 2)$

Таблица 3: Таблица эквивалентностей схем Дынкина

2.2 Корневая система алгебры Ли $su(3)$

В предыдущем параграфе мы определили необходимые понятия теории алгебр Ли. Теперь проанализируем конкретный пример, из которого станет ясен рецепт восстановления структуры алгебры по диаграмме Дынкина.

Рассмотрим алгебру Ли $su(3)$. Она состоит из антиэрмитовых матриц с нулевым следом. Она является матричной реализацией простой алгебры Ли A_2 . Её корневая система задаётся следующим образом. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 ортонормированный базис. Возьмём вектор, получаемый из суммы базисных, проведём в точке с координатами вектора гиперплоскость, ортогональную ему. На пересечении гиперплоскости и сетки целочисленных координат в \mathbb{R}^3 выберем те точки l , для которых скалярное произведение $(l, l) = 2$. Множество таких векторов образует корневую систему A_2 . Корневая система имеет вид 2. Она может быть полностью восстановлена из диаграммы Дынкина с помощью операторов s_r и правил, изложенных в таблице 1. Стоит заметить, что в случае A_n построение корневой системы аналогичное. Впрочем, можно пойти другим путём и получить тот же ре-

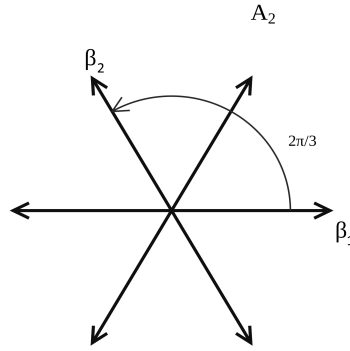


Рис. 2: Корневая система алгебры Ли $su(3)$

зультат, но заполучить при этом ещё и коммутационные соотношения, описав всю алгебру. В нашем случае, алгебра имеет восемь параметров (из-за наложения связей, возникающих из унитарности матриц и равенства определителя единице), а базис подалгебры Картана будет состоять из двух элементов H_1, H_2 , так как ранг характеристического многочлена $r = 2$. Таким образом, нашей алгебре можно сопоставить восемь двухмерных векторов, 6 из которых, не относящиеся к подалгебре Картана, и будут составлять нашу корневую систему. Среди них есть два базисных корня β_1 и β_2 , которым можно сопоставить по тройке образующих H_i, X_i, Y_i , где $i = 1, 2$, с композициями как в теореме 1. Воспользуемся формулой (9) для a_{ij} чтобы построить матрицу Картана:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Затем, используя таблицу, мы можем найти углы между базисными корнями, а затем найти и всю корневую систему, применив к ним поочерёдно

оператор s_r . Таким образом имеем:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \beta_1 + \beta_2, \\ [H_i, X_{\beta_3}] &= (\beta_1 + \beta_2)^i X_{\beta_3}, \\ [H_i, Y_{\beta_3}] &= (\beta_1 + \beta_2)^i Y_{\beta_3}.\end{aligned}\tag{12}$$

К тому же:

$$X_3 = [X_1, X_2],\tag{13}$$

$$[H_3, X_3] = 2X_3, \quad H_3 = [X_3, Y_3], \quad Y_3 = c[Y_1, Y_2].\tag{14}$$

Тогда оказывается $H_3 = H_1 + H_2$, а $c = -1$.

А из тождества Якоби найдём остальные структурные константы:

$$\begin{aligned}[X_3, Y_1] &= [[X_1, X_2], Y_1] = [H_1, X_2] = -X_2, \\ [X_3, Y_2] &= [[X_1, X_2], Y_2] = -[H_2, X_1] = X_1, \\ [X_1, Y_3] &= -[X_1, [Y_1, Y_2]] = [Y_2, H_1] = -Y_2, \\ [X_2, Y_3] &= -[X_2, [Y_1, Y_2]] = -[Y_1, H_2] = Y_1.\end{aligned}\tag{15}$$

В конечном итоге все коммутационные соотношения можно занести в таблицу Кэли 4:

	H_1	H_2	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
H_1		0	$2X_1$	$-X_2$	X_3	$-2Y_1$	Y_2	$-Y_3$
H_2			$-X_1$	$2X_2$	X_3	Y_1	$-2Y_2$	$-Y_3$
X_1				X_3	0	H_1	0	$-Y_2$
X_2					0	0	H_2	Y_1
X_3						$-X_2$	X_1	$H_1 + H_2$
Y_1							$-Y_3$	0
Y_2								0
Y_3								

Таблица 4: Коммутационные соотношения

Таким образом, мы полностью восстановили структуру алгебры Ли $su(3)$ по её корневой системе.

2.3 Теория представлений алгебр Ли и тензорное произведение представлений

Перейдём к более подробному описанию теории представлений алгебр Ли. В предыдущем параграфе мы часто использовали понятие присоединённого представления. Однако, существует огромное множество других представлений алгебр Ли, речь о которых и пойдёт в данном параграфе.

Определим необходимые понятия.

Определение 11. Пусть дано представление $R : X \rightarrow gl(V)$. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно данного представления, если оно инвариантно относительно всех операторов данного представления. Очевидно, что сумма и пересечение инвариантных подпространств — инвариантно. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству является инвариантным подпространством.

Определение 12. С каждым инвариантным подпространством U связаны два представления. Подпредставление $R_U : X \rightarrow gl(U)$, $R_U(x) = R(x)|_U$. Фактор-представление $R_{V/U} : X \rightarrow gl(V/U)$, $R_{V/U}(x)(x + U) = R(x)v + U$.

Замечание 1. Если первые вектора базиса V представляют из себя базис инвариантного подпространства U , то

$$R(x) = \begin{pmatrix} R_U(x) & * \\ 0 & R_{V/U}(x) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Доказательство этого утверждения изложено в книге [1], раздел 11.1.1.

Определение 13. Линейное на V представление называется неприводимым, если $V \neq 0$ и не существует нетривиальных инвариантных относительно R подпространств $U \subset V$.

Подпредставления в присоединённом представлении являются идеалами алгебры Ли из свойств гомоморфизма. Таким образом легко видеть, что присоединённое представление простой алгебры Ли неприводимо.

Рассмотрим конструкцию, несколько более общую, чем корни, но крайне на неё похожую. Пусть как и раньше \mathfrak{g} — простая алгебра Ли, R — её конечномерное неприводимое представление. Если \mathfrak{h} — подалгебра Картана, то все операторы $R(\mathfrak{h})$ можно разом диагонализировать.

Определение 14. Пусть e_1, \dots, e_n — линейно независимые собственные векторы операторов $T(\mathfrak{h})$. Тогда

$$T(\mathfrak{h})e_j = \lambda_j(\mathfrak{h})e_j \quad (17)$$

где λ_j — линейные формы на подалгебре Картана, называемые весами представления T , а e_j — весовые векторы.

Нетрудно видеть, что корни являются весами в присоединённом представлении.

Пусть e — весовой вектор с весом λ , а \mathbf{x}_β — корневой элемент той же алгебры, отвечающий корню β , тогда $T(\mathbf{x}_\beta)e$ — весовой вектор, соответствующий весу $\lambda + \beta$. Пускай β положителен, представление T конечномерно, а векторы, принадлежащие разным весовым подпространствам, линейно

независимы. После конечного числа действий такими операторами придём к весовому вектору v такому, что $T(\mathbf{x}_\beta)v = 0$, хотя $v \neq 0$. Пускай λ — вес этого вектора. Тогда говорят, что λ — старший вес представления T , а v — вектор старшего веса.

Определим понятие изоморфизма представлений

Определение 15. Пусть $R : X \rightarrow gl(V)$, $S : X \rightarrow gl(U)$ — два линейных представления одного множества. Морфизмом представления R в представление S называется любое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow U$ такое, что нижеизложенная диаграмма коммутативна для любого $x \in X$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{R(x)} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ U & \xrightarrow{S(x)} & U \end{array} \quad (18)$$

Два представления называют изоморфными, если между ними существует изоморфизм. А именно, в диаграмме можно построить обратный морфизм. В подходящих базисах U и V представления записываются одними и теми же матрицами.

В работе [7] доказывается, что в пространстве неприводимого представления T с точностью до константы существует один вектор старшего веса и представление T с точностью до эквивалентности однозначно определяется старшим весом. Эквивалентными представлениями называют изоморфные представления. Таким образом, можно сформулировать теорему.

Теорема 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между парно неэквивалентными неприводимыми конечномерными представлениями простой алгебры Ли \mathfrak{g} и старшими весами этих представлений. В пространстве неприводимого конечномерного представления существует базис, состоящий из весовых векторов. Количество базисных весовых векторов равно рангу алгебры. Если λ — старший вес, а β_i — набор простых корней, то любой другой вес этого представления имеет вид $\lambda - \sum_i k_i \beta_i$, где k_i — целые неотрицательные числа. Кратность старшего веса этого представления (то есть размерность собственного подпространства, соответствующего этому весу) равна единице.*

Доказательство этого факта изложено в книге [8]. По аналогии с корнями, веса можно записывать в виде векторов $\lambda' = (a_1, \dots, a_r)$, где $a_i = \frac{2(\lambda_i, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$, r — ранг алгебры \mathfrak{g} .

Очень важным примером конечномерных неприводимых представлений простых алгебр Ли ранга r являются фундаментальные представления.

Определение 16. Представления со старшими весами

$$(1, 0, \dots, 0), \quad (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad (0, 0, \dots, 1) \quad (19)$$

называются фундаментальными и обозначаются ν_i .

Название связано с тем, что из линейной комбинации весов этих представлений можно получить старший вес каждого неприводимого конечномерного представления, как следствие из теоремы, сформулированной выше. Так же из этой теоремы следует, что число неэквивалентных фундаментальных представлений совпадает с рангом алгебры \mathfrak{g} . Ниже приведём пример построения двух неэквивалентных фундаментальных представлений, рисунок 3. На практике фундаментальные веса можно изобразить, воспользовавшись небольшим следствием из их определения. Имеем

$$\frac{2(\nu_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} = \delta_i^j, \quad (20)$$

из чего их можно мгновенно построить.

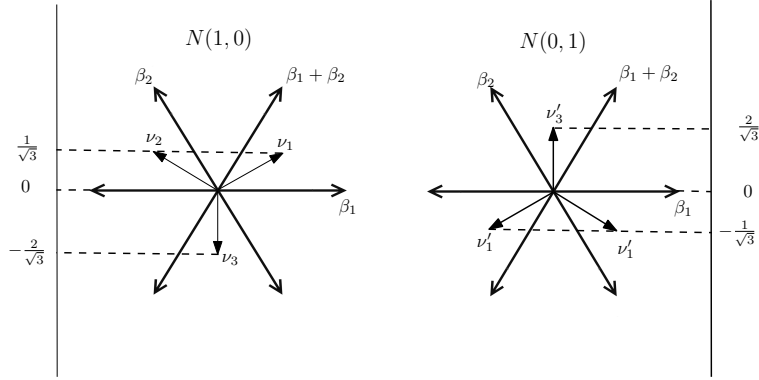


Рис. 3: Неэквивалентные фундаментальные представления $su(3)$

Теперь обобщим разложение Картана-Вейля. Если V — пространство неприводимого конечномерного представления T со старшим весом λ , то

$$V = \bigoplus_{\lambda'} V_{\lambda'}' \quad (21)$$

где суммирование ведётся по всем весам представления, а $V_{\lambda'}'$ — собственные подпространства операторов $T(\mathfrak{h})$, принадлежащие весам λ' . Как уже было написано, кратностью веса называется размерность подпространства $V_{\lambda'}'$. Размерностью представления называется размерность линейного пространства V представления. Так как кратность веса λ_i равна размерности соответствующего ему пространства V_{λ_i} , то можно сказать, что размерность представления равна сумме кратностей всех весов.

Более того, можно изобразить представление нашей алгебры Ли с помощью весовой диаграммы. Весовая диаграмма неприводимого представления простой алгебры Ли также будет инвариантна относительно действия оператора s_r .

Рассмотрим пример построения весовой диаграммы представления. Старшему весу λ можно сопоставить коэффициенты разложения по фундаментальным весам $m_i = \frac{2(\lambda, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$. Их называют индексами Дынкина. Так как старший вес однозначно определяет представление, то его весовую диаграмму принято обозначать $N(m_1, \dots, m_r)$, где r — ранг алгебры \mathfrak{g} . Стоит заме-

титель, что конец всякого вектора, являющегося весом неприводимого представления, лежит в узле решётки, рёбрами которой служат фундаментальные веса.

Продemonстрируем всё это на уже рассмотренной нами $su(3)$. Для неё можно сформулировать некоторое правило построения весовой диаграммы и нахождения размерности представления.

Утверждение 1. *Всякая диаграмма $N(m_1, m_2)$ конечномерного неприводимого представления алгебры A_2 распадается на последовательность вложенных друг в друга шестиугольных и треугольных контуров. Пронумеруем их извне внутрь. Кратность весов первого треугольника также равна его номеру и остаётся постоянной для всех следующих. Нулевой вес считается вырожденным треугольником или шестиугольником в зависимости от того, находится он внутри треугольного или шестиугольного контура.*

Подробный анализ того, почему это утверждение верно есть в монографии [2], с. 204. Применение правила можно видеть на примере рисунка 4.

$$N(3, 2)$$

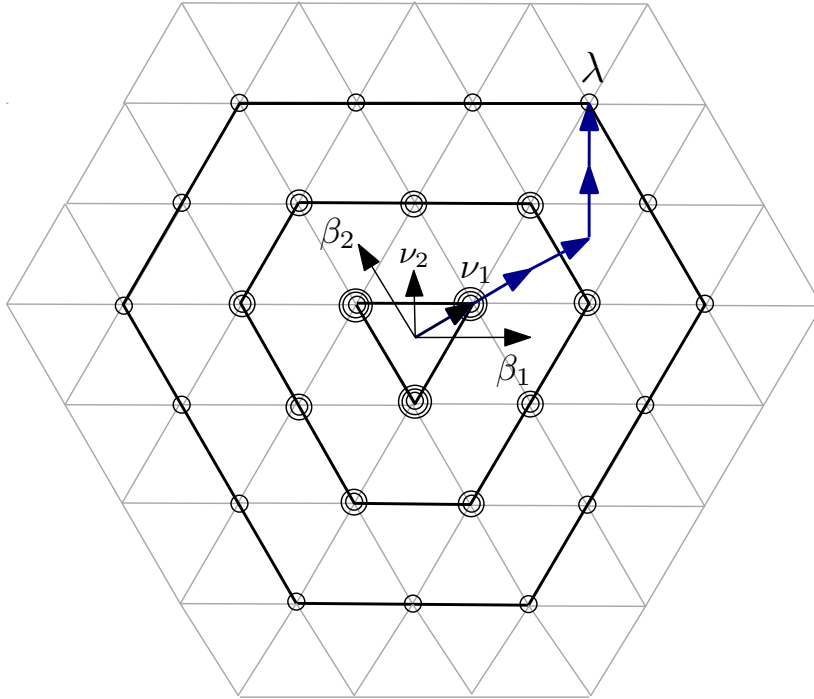


Рис. 4: Весовая диаграмма представления $N(3, 2)$

Сначала выберем базис из фундаментальных весов. Имея коэффициенты m_1, m_2 можем построить старший вес λ . Из определения старшего веса восстанавливаем форму шестиугольника, а затем и все остальные многоуголь-

ники, вложенные в него. Их нумерации соответствуют количеству кружков. Им же соответствует кратность веса, конец которого указывает в узел решётки. Отсюда несложно видеть, что размерность нашего представления равна 42.

Далее, рассмотрим понятие тензорного произведения представлений.

Определение 17. Тензорным произведением представлений $R : G \rightarrow gl(V)$ и $S : H \rightarrow gl(W)$ называется представление

$$R \otimes S : G \times H \rightarrow gl(V \otimes W) \quad (22)$$

определяемое формулой

$$(R \otimes S)(g, h) = R(g) \otimes I + I \otimes S(h) \quad (23)$$

Разложение представления на неприводимые — задача о разложении пространства представления V в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств. Такое разложение осуществимо тогда и только тогда, когда представление вполне приводимо (представление вполне приводимо тогда, когда для всякого инвариантного подпространства пространства представления имеется инвариантное дополнительное пространство). Доказательство этого факта есть в [1], теорема 11.1.3. При таком разложении все операторы представления будут представлять из себя блочно-диагональные матрицы, где каждый блок будет действовать на соответствующем инвариантном подпространстве в разложении в прямую сумму.

Стоит заметить, что введение представления на алгебре Ли индуцирует структуру \mathfrak{g} -модуля на векторном пространстве V . Посему зачастую удобно говорить о разложении представления алгебры Ли в прямую сумму неприводимых модулей. Пускай μ, ν — старшие веса двух представлений, V^μ, V^ν — \mathfrak{g} -модули, соответствующие представлениям алгебры Ли \mathfrak{g} . Рассмотрим тензорное произведение двух таких модулей. Тогда их разложение будет выглядеть следующим образом:

$$V^\mu \otimes V^\nu = \bigoplus_{\lambda} Z(\lambda, N) V^\lambda \quad (24)$$

где в правой части стоят неприводимые модули, прямое суммирование которых ведётся по старшим весам представлений. Нас будут интересовать числа $Z(\lambda, N)$, называемые кратностью представления. В нашей задаче этим числам соответствует количество собственных подпространств, отвечающих одному и тому же собственному значению Гамильтониана.

Итак, самым простым и прямолинейным способом разложения тензорного произведения неприводимых представлений на неприводимые является графический метод. Пускай у нас есть два представления c и d , которым соответствуют весовые диаграммы $N(c)$ и $N(d)$. Сначала построим весовую диаграмму $N(t)$ их тензорного произведения $c \otimes d$. Начиная с произвольного сомножителя, принимаем концы каждого весового вектора за начало координат и воспроизводим на том месте весовую диаграмму следующего сомножителя, сохраняя масштаб и направление осей. В виду ассоциативности тензорного произведения, данное правило можно распространить на любое число сомножителей в тензорном произведении. Далее разложим это представление на неприводимые. Старший вес имеет единичную кратность

и полностью определяет представление. Обозначим это представление b . Можно вычестить из диаграммы $N(t)$ диаграмму $N(b)$, учитывая при этом правило, сформулированное в лемме, получив в результате диаграмму другого представления. Далее повторяем операцию и получаем искомое разложение. Более чётко это можно видеть на рисунке 5, на примере той же алгебры $su(3)$ и тензорного произведения её фундаментальных представлений.

Положительной стороной данного способа получения разложения является его относительная простота, отрицательная — он не помогает решить задачу полностью: мы хоть и построим разложение, но сам базис, в котором пространство представления будет разделено на инвариантные подпространства мы не получим. Задачу построения такого базиса решает нахождение коэффициентов Клебша-Гордона. Естественно, графический метод не является единственным. Например, он допускает обобщение до правила Климыка, которое позволяет не строить всю весовую диаграмму тензорного произведения представлений, а требует знания только старшего веса одного представления и полный набор характеров для другого. Подробнее про правило Климыка можно узнать в [9]. Кроме того, существует комбинаторный метод получения разложения тензорного произведения представлений на неприводимые: правило Литтлвуда-Ричардсона. Примечательно, что этот метод позволяет строить разложение тензорного произведения, состоящего из N одинаковых сомножителей. Стоит отметить, что правило Литтлвуда-Ричардсона не задействует аппарат весовых решёток, корней, характеров, а использует комбинаторные свойства схем Юнга. Подробнее о нём изложено в [2] 7.4., а также в [10]. Недостатком данного метода является ограниченная область применимости, а именно, он применим лишь к алгебрам Ли серии A_n . Это связано с тем, что он опирается на дуальность Шура-Вейля между представлениями $sl(n)$ и представлениями группы перестановок S_n . Обобщением на алгебры остальных серий является модель путей Литтельманна. Центральными в этом методе являются пути на весовой решётке, начинающиеся в нулевом весе и кончающиеся в одном из весов на решётке. Каждому простому корню сопоставляются два некоторых оператора. Если путь, кончающийся в весе λ , полностью лежит в камере Вейля, то модуль, генерируемый действиями этих двух операторов на данный путь, является неприводимым модулем в разложении алгебры Ли, соответствующим старшему весу λ . Подробнее про модель путей Литтельманна можно узнать в [11]. В дипломной работе нам необходимо сконцентрироваться на методе, задействующем формализм кристаллических базисов, о котором будет рассказано чуть позже. В [12] показано, что модель путей Литтельмана и метод кристаллических базисов в некотором смысле изоморфны, однако последний имеет ряд преимуществ перед остальными методами.

Некоторые из вышеупомянутых методов реализованы в виде пакетов для вычислительных систем Maple, Mathematica и других. Более того, в публичном доступе есть пакет под названием LiE, который работает на основе двух методов: правило Литтлвуда-Ричардсона для алгебр Ли серии A_n и правило Климыка для остальных. Подробнее о нём написано в [13]. Стоит также упомянуть и другие программные реализации: [14], [16] и [15]. Метод кристаллических базисов тоже используется в численных методах, в том числе нами будет предложен алгоритм и его программная реализация

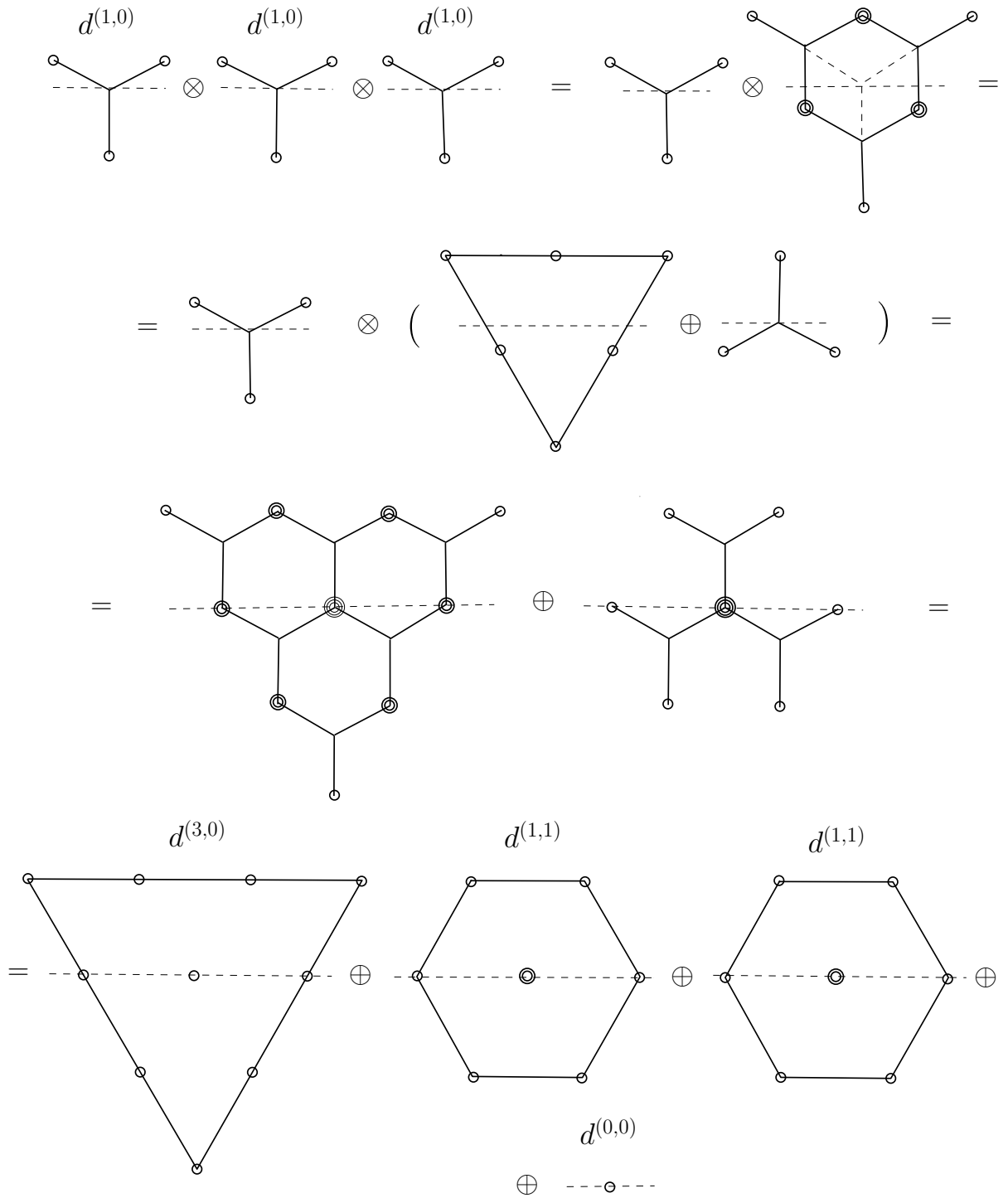


Рис. 5: Пример весовых диаграмм тензорного произведения и их разложения

для решения задачи разложения тензорного произведения на неприводимые компоненты для первого фундаментального представления алгебры $su(3)$.

2.4 Квантовые группы

В теории кристаллических базисов задействован аппарат квантовых групп, введение в который и будет изложено в данном параграфе. Повествование будет вестись в соответствии с монографиями [3] и [12].

Сначала необходимо пересмотреть некоторые из определений, данные в первом параграфе. Пускай, как и было прежде, $A = (a_{ij})$ — матрица Картана. Скажем для определённости, что $i, j \in I$, где I — конечный набор индексов. Вспомним, что элементы матрицы Картана даются формулой

$$a_{ij} = \frac{2(\beta_i, \beta_j)}{(\beta_i, \beta_i)}, \quad (25)$$

где β_i — базисные корни. Обозначим $\Pi = \{\beta_i, i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$ — линейно независимый набор простых корней, а $\Pi^\vee = \{H_i, i \in I\}$ — набор простых кореней. Напомним, что корни являются линейными формами на подалгебре Картана \mathfrak{h} , что делает наши обозначения вполне логичными. Также напомним, что $\beta_j(H_i) = a_{ij}$, по теореме 1. Обозначим дуальную решётку весов P^\vee . Она является свободной абелевой группой ранга $2|I| - \text{rank } A$ с \mathbb{Z} -базисом, состоящим из элементов $\{H_i | i \in I\} \cup \{d_s | s = 1, \dots, |I| - \text{rank } A\}$, где $\beta_i(d_s) = \{0, 1\}$. Обозначим весовую решётку как $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(P^\vee) \subset \mathbb{Z}\}$. В такой нотации $\mathfrak{h} = \mathbb{F}_{\otimes \mathbb{Z}} P^\vee$. Фундаментальные веса $\nu_i \in \mathfrak{h}^*$, $i \in I$ задаются соотношениями $\nu_i(H_j) = \delta_i^j$ и $\nu_i(d_s) = 0$. Как прежде определен оператор s_r в весовом и корневом пространствах. Дадим определение алгебры Каца-Мули.

Определение 18. Алгеброй Каца-Мули, соответствующей $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ называется алгебра Ли \mathfrak{g} , определяемая генераторами X_i, Y_i , принадлежащими, соответственно, положительным и отрицательным корневым подпространствам, где $i \in I$, и элементами $h \in \mathfrak{h}$, между которыми заданы соотношения:

1. $[h, h'] = 0, \forall h, h' \in P^\vee$,
2. $[X_i, Y_j] = \delta_i^j H_i$,
3. $[h, X_i] = \beta_i(h) X_i, \forall h \in P^\vee$,
4. $[h, Y_i] = -\beta_i(h) Y_i, \forall h \in P^\vee$,
5. $(ad_{X_i})^{1-a_{ij}} X_j = 0$, для $i \neq j$,
6. $(ad_{Y_i})^{1-a_{ij}} Y_j = 0$, для $i \neq j$.

Матрица Картана, в случае разложения на произведение $A = DS$ диагональной и симметричной матриц, классифицирует алгебры Каца-Мули на три группы:

1. если матрица S положительно определена, то \mathfrak{g} — полупростая алгебра Ли,
2. если матрица S положительно полуопределена, то \mathfrak{g} — аффинная алгебра Ли,
3. в противном случае, \mathfrak{g} — алгебра Ли неопределённого типа.

Определим понятие универсальной обёртывающей алгебры.

Определение 19. Универсальной обёртывающей алгеброй $U(\mathfrak{g})$ называется ассоциативная алгебра над полем \mathbb{F} с единицей, генерируемая элементами X_i, Y_i, H_i где $i \in I$ и удовлетворяющая соотношениям:

1. $hh' = h'h, \forall h, h' \in P^\vee,$
2. $X_i Y_j - Y_j X_i = \delta_i^j H_i,$
3. $hX_i - X_i h = \beta_i(h)X_i, \forall h \in P^\vee,$
4. $hY_i - Y_i h = -\beta_i(h)Y_i, \forall h \in P^\vee,$
5. $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} X_i^{1-a_{ij}-k} X_j X_i^k = 0, \text{ для } i \neq j,$
6. $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} Y_i^{1-a_{ij}-k} Y_j Y_i^k = 0, \text{ для } i \neq j.$

Из любой ассоциативной алгебры с единицей можно сделать алгебру Ли добавив коммутатор. Универсальная обёртывающая делает этот процесс обратимым, делая алгебру Ли ассоциативной алгеброй с единицей. Универсальную обёртывающую можно строить в том числе и на корневых подпространствах, поэтому для неё тоже справедливо разложение по корневым подпространствам:

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\beta \in Q} U_\beta, \quad (26)$$

где Q – корневая решётка. Внутри прямой суммы встречаются как положительные, так и отрицательные корни.

Напомним, что представление индуцирует в алгебре Ли структуру модуля. Если он допускает разложение на весовые подпространства, то он называется весовым. Категория весовых модулей, имеющих конечный набор конечномерных весовых подпространств обозначается \mathcal{O} . Эта категория замкнута относительно взятия конечной прямой суммы или конечного тензорного произведения её объектов. Модули старшего веса принадлежат этой категории. Назовём весовой модуль V интегрируемым, а их категорию \mathcal{O}_{int} , если все генераторы X_i, Y_i локально нильпотентны на V . В последнем случае набор весов $wt(V) \in P$. Для этой категории справедливо множество хороших свойств, например, каждый модуль этой категории изоморфен прямой сумме неприводимых модулей старшего веса из соответствующей весовой решётки, а также, что нам необходимо, тензорное произведение конечного числа модулей этой категории будет вполне приводимым. В дальнейшем мы будем вести рассуждения в предположении о том, что $V^\lambda \in \mathcal{O}_{int}$, где V^λ — рассматриваемый \mathfrak{g} -модуль V со старшим весом λ .

Далее, нам понадобится определение алгебры Хопфа. Это ассоциативная алгебра, которая позволяет задать структуру модуля на тензорном произведении модулей. После длинного определения будет дано объяснение, зачем нам оно необходимо.

Определение 20. Ассоциативная алгебра \mathcal{A} над полем \mathbb{F} — векторное пространство над этим полем с линейными отображениями: $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,

называемым умножением, и $i : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{A}$, называемым единицей, удовлетворяющими коммутативным диаграммам

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathbb{F} & \xrightarrow{id \otimes i} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow \simeq & \swarrow \mu \\ & \mathcal{A} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{F} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{i \otimes id} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow \simeq & \swarrow \mu \\ & \mathcal{A} & \end{array} \quad (27)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu \otimes id} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ id \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array} \quad (28)$$

Определение 21. Гомоморфизмом алгебр называется линейное отображение $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, удовлетворяющее равенствам $\phi \circ \mu_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{A}'} \circ \phi \otimes \phi$ и $\phi \circ i_{\mathcal{A}} = i_{\mathcal{A}'}$, а также коммутативным диаграммам

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ \phi \otimes \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}' & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}'}} & \mathcal{A}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ i_{\mathcal{A}'} \searrow & & \swarrow \phi \\ & \mathcal{A}' & \end{array} \quad (29)$$

Определение 22. Ассоциативная коалгебра \mathcal{C} над полем \mathbb{F} — векторное пространство над этим полем с линейными отображениями: $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$, называемым коумножением, и $\epsilon : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{F}$, называемым коединицей, удовлетворяющими коммутативным диаграммам

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathbb{F} & \xleftarrow{id \otimes \epsilon} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ & \searrow \simeq & \swarrow \Delta \\ & \mathcal{C} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{F} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ & \searrow \simeq & \swarrow \Delta \\ & \mathcal{C} & \end{array} \quad (30)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta \otimes id} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ id \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{C} \end{array} \quad (31)$$

Определение 23. Гомоморфизмом коалгебр называется линейное отображение $\phi : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, удовлетворяющее равенствам $\phi \otimes \phi \circ \Delta_{\mathcal{C}'} = \Delta_{\mathcal{C}} \circ \phi$ и $\epsilon_{\mathcal{C}} \circ \phi = \epsilon_{\mathcal{C}'}$, а также коммутативным диаграммам

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ \phi \otimes \phi \uparrow & & \uparrow \phi \\ \mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}' & \xleftarrow{\Delta_{\mathcal{C}'}} & \mathcal{C}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xleftarrow{\epsilon_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ \epsilon_{\mathcal{C}'} \searrow & & \swarrow \phi \\ & \mathcal{C}' & \end{array} \quad (32)$$

А теперь определение самой алгебры Хопфа.

Определение 24. Алгеброй Хопфа \mathcal{H} над полем \mathbb{F} называется векторное пространство над этим же полем с умножением $\mu : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и коумножением $\Delta : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, единицей $i : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{A}$ и коединицей $\epsilon : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{C}$, антиподом $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, удовлетворяющими следующим условиям:

1. (\mathcal{H}, μ, i) — алгебра над полем \mathbb{F} ,
2. $(\mathcal{H}, \Delta, \epsilon)$ — коалгебра над полем \mathbb{F} ,
3. умножение и единица — гомоморфизмы коалгебры,
4. коумножение и коединица — гомоморфизмы алгебры,
5. антипод S удовлетворяет коммутативным диаграммам:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{S \otimes id} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \mu \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{i \circ \epsilon} & \mathcal{H} \end{array} \quad (33)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{id \otimes S} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \uparrow \Delta & & \downarrow \mu \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{i \circ \epsilon} & \mathcal{H} \end{array} \quad (34)$$

Универсальная обёртывающая с введённой на ней операцией коумножения становится алгеброй Хопфа, где в роли коумножения выступает гомоморфизм $\Delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, определяемый как

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \forall x \in \mathfrak{g}. \quad (35)$$

Таким образом, на тензорном произведении универсальных обёртывающих заведена структура $U(\mathfrak{g})$ -модуля. На V^* тоже определена структура $U(\mathfrak{g})$ -модуля, но несколько иная. Она определяется действием:

$$(x \cdot f)(v) = f(S(x) \cdot v), \quad \forall x \in \mathfrak{g}, f \in V^*, v \in V, \quad (36)$$

где $S(x) = -x$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ — действие антипода.

Перейдём теперь к рассмотрению самой теории квантовых групп. Введём квантовые деформации универсальных обёртывающих алгебр $U_q(\mathfrak{g})$, также известные, как квантовые группы. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ определим

$$[n]_q = \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}}, \quad (37)$$

а также положим $[0]_q! = 1$ и $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \dots [1]_q$ для $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $m \geq n \geq 0$ определим биномиальные коэффициенты:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q![m-n]_q!}. \quad (38)$$

Элементы $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ и $[n]_q$ образуют поле $\mathbb{F}(q)$. При стремлении $q \rightarrow 1$, очевидно, будет выполнено $[n]_q \rightarrow n$ и $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q \rightarrow \binom{m}{n}$.

Определение 25. Квантовой группой $U_q(\mathfrak{g})$, или квантовой универсальной обёртывающей алгеброй, соответствующей $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ называется ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{F}(q)$ с единицей, определяемая генераторами X_i, Y_i , где $i \in I$, и элементами q^h , где $h \in P^\vee$, между которыми заданы соотношения:

1. $q^0 = 1, q^h q^{h'} = q^{h+h'}, \forall h, h' \in P^\vee,$
2. $q^h X_i q^{-h} = q^{\beta_i(h)} X_i, \forall h \in P^\vee,$
3. $q^h Y_i q^{-h} = q^{-\beta_i(h)} Y_i, \forall h \in P^\vee,$
4. $X_i Y_j - Y_j X_i = \delta_i^j \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \forall i, j \in I,$
5. $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix} X_i^{1-a_{ij}-k} X_j X_i^k = 0, \text{ для } i \neq j,$
6. $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix} Y_i^{1-a_{ij}-k} Y_j Y_i^k = 0, \text{ для } i \neq j,$

где $q_i = q^{s_i}$, $K_i = q^{s_i h_i}$, а s_i — элементы матрицы D в разложении матрицы Картана $A = DS$.

На квантовой группе естественным образом возникает структура алгебры Хопфа с определёнными действиями:

1. $\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h,$
2. $\Delta(X_i) = X_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes X_i,$
3. $\Delta(Y_i) = Y_i \otimes 1 + K_i \otimes Y_i,$
4. $\epsilon(q^h) = 1, \epsilon(X_i) = \epsilon(Y_i) = 0,$
5. $S(q^h) = S(q^{-h}), \quad S(X_i) = -X_i K_i, \quad S(Y_i) = -K_i^{-1} Y_i,$

где $h \in P^\vee, i \in I$.

Есть несколько причин, для чего в дипломной работе мы рассмотрели алгебры Хопфа. Стоит сказать, что мы в некотором смысле убедились в том, что тензорное произведение интегрируемых модулей не выводит нас из категории \mathcal{O}_{int} . Более того, это же справедливо и для их квантовых деформаций, а именно, тензорное произведение $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей является $U_q(\mathfrak{g})$ -модулем.

Затем, с каждой универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{g})$ мы можем связать целую совокупность квантовых групп $U_q(\mathfrak{g})$. Иногда квантовую группу так и определяют: как спектр некоторой алгебры Хопфа. Вся эта совокупность при стремлении $q \rightarrow 1$ переходит в $U(\mathfrak{g})$, и по теореме Люстига [17] теория представлений $U_q(\mathfrak{g})$ перейдёт в представление $U(\mathfrak{g})$ таким образом, что размерности весовых пространств останутся инвариантными при условии, что $U_q(\mathfrak{g}) \in \mathcal{O}_{int}^q$. Другими словами, пускай $U(\mathfrak{g})$ -модуль V из категории \mathcal{O}_{int} разложен по весовым подпространствам $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda$. Теорема Люстига

утверждает, что для каждого q существует $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль из категории \mathcal{O}_{int}^q с разложением $V^q = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda^q$ такой, что $\dim_{C(q)} V_\lambda^q = \dim_C V_\lambda$ для всех $\lambda \in P$

так, что структура V^q стремится к структуре V при $q \rightarrow 1$. Это играет ключевую роль в теории кристаллических базисов. Сам базис достаточно простым образом строится при $q = 0$, а затем, получив разложение, мы стремим $q \rightarrow 1$ и получаем искомое разложение тензорного произведения представлений на неприводимые. Но стремление происходит в некотором особом смысле, о котором будет сказано чуть ниже.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим пример. Рассмотрим квантовую деформацию алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Сама алгебра трёхпараметрична, ранг $r = 1$, порождена элементами X, Y, H и коммутационными соотношениями:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H. \quad (39)$$

Из этих же элементов используя определение универсальной обёртывающей, можно получить и $U(sl(2, \mathbb{C}))$. Зафиксируем отличное от нуля и единицы число $q = e^\tau$ и деформируем соотношения:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = \frac{sh \tau H}{sh \tau} = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}, \quad (40)$$

где $sh \tau H = \tau H + \frac{1}{3!}(\tau H)^3 + \dots$ — разложение в формальный ряд. Чтобы иметь дело с конечными рядами можно рассмотреть $K = q^H = e^{\tau H}$ и получить коммутационные соотношения в точности как в определении квантовой группы. Базис полученной в ходе таких операций алгебры состоит из одночленов $X^r K^m Y^n$ и $Y^r K^m X^n$, где $m \in \mathbb{Z}$, $r, k \in \mathbb{Z}_+$. Далее, следуя изложенным определениям, нетрудно ввести на ней структуру алгебры Хопфа. Остаётся только убедиться в выполнении следующих соотношений:

1. $\Delta(K)\Delta(X)\Delta(K^{-1}) = q^2\Delta(X)$,
2. $\Delta(K)\Delta(Y)\Delta(K^{-1}) = q^{-2}\Delta(Y)$,
3. $\Delta(K)\Delta(K^{-1}) = \Delta(K^{-1})\Delta(K) = 1$,
4. $[\Delta(X), \Delta(Y)] = \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}}$,

тем самым убедившись в том, что Δ и ϵ являются гомоморфизмами, как в соответствующем определении. Получившаяся в ходе деформации и проделанных манипуляций алгебра $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ и будет являться квантовой группой.

Теперь стоит объяснить в каком смысле следует понимать стремление параметра q к тому или иному значению. Если параметр $q \rightarrow 1$, то о таком стремлении говорят как о стремлении в смысле классического предела. Заметим, что элементы $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_{q_i}$ и $[n]_{q_i}$ образуют также кольцо многочленов $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Рассмотрим кольцо $\mathbf{A}_1 = \{g/f | g, f \in \mathbb{F}[q], f(1) \neq 0\} \subset \mathbb{F}[q, q^{-1}]$, его максимальный идеал \mathbf{J}_1 , порождённый $q - 1$. Из теорем общей алгебры известно, что существует изоморфизм

$$\mathbf{A}_1/\mathbf{J}_1 \simeq \mathbb{F}, \quad \text{где } f(q) + \mathbf{J}_1 \mapsto f(1). \quad (41)$$

Определим $U_{\mathbf{A}_1}$ как подалгебру $U_q(\mathfrak{g})$, генерируемую элементами X_i, Y_i, q^h и $(q^h; 0)_q$, где $i \in I$, $h \in P^\vee$ и

$$(y; n)_x = \frac{yx^n - 1}{x - 1}. \quad (42)$$

Определим $V_{\mathbf{A}_1} = U_{\mathbf{A}_1} v_\lambda$, где $V_{\mathbf{A}_1}$ — $U_{\mathbf{A}_1}$ -модуль, а v_λ — вектор, соответствующий старшему весу λ .

Определение 26. Отображения

$$U_{\mathbf{A}_1} \rightarrow U_{\mathbf{A}_1}/\mathbf{J}_1 U_{\mathbf{A}_1} \simeq (\mathbf{A}_1/\mathbf{J}_1) \otimes_{\mathbf{A}_1} U_{\mathbf{A}_1} = U_1 \quad (43)$$

$$V_{\mathbf{A}_1} \rightarrow V_{\mathbf{A}_1}/\mathbf{J}_1 V_{\mathbf{A}_1} \simeq (\mathbf{A}_1/\mathbf{J}_1) \otimes_{\mathbf{A}_1} V_{\mathbf{A}_1} = V_1 \quad (44)$$

называются классическим пределом, где $U_1 = U(\mathfrak{g})$.

Именно в смысле данного предела теория представлений $U_q(\mathfrak{g})$ будет стремиться к одной для $U(\mathfrak{g})$. Подробный анализ того, почему данное свойство справедливо представлен в [17].

Аналогично, стремление $q \rightarrow 0$ следует понимать как стремление в смысле кристаллического предела, и о нём будет рассказано в следующем параграфе.

Стоит отметить, что формализм квантовых групп также находит себе применение в физике безотносительно кристаллических базисов. Изначально квантовые группы возникли в таких задачах, как решение квантового уравнения Янга-Бакстера или решения уравнения синус-Гордона, где были рассмотрены деформированные тензорные произведения пространств состояний. Туда естественным образом была приложена структура алгебры Хопфа и были рассмотрены квантовые группы. Подробнее эти задачи проанализированы в статьях [21] и [19], соответственно. В следующей главе речь пойдёт о квантовой спиновой цепочке. Существует множество моделей: $\mathbf{XXX}_{\frac{1}{2}}$, \mathbf{XYZ} и другие. Некоторые модели получаются деформацией взаимодействия между узлами цепочки. Для описания сохраняющейся структуры и были введены квантовые группы.

2.5 Кристаллические базисы

Кристаллические базисы — мощный аппарат для анализа представлений алгебр Ли. Он способен обслуживать достаточно общий класс представлений, а именно, как уже было сказано, интегрируемые модули категории \mathcal{O}_{int} . Хорошей особенностью данной конструкции является относительная простота её построения, а также хорошее поведение при обслуживании тензорных произведений представлений нескольких сомножителей, взятии пределов. Данным вопросам посвящён этот параграф. Изложение соответствующих понятий будет вестись в соответствии с монографией [12].

Итак, сам кристаллический базис представляет собой базис модуля категории \mathcal{O}_{int} при $q = 0$. Этому базису можно сопоставить кристаллический граф, на узлах которого действуют операторы Кашивары. Связные части этого графа и дадут нам неприводимые компоненты в разложении.

Для модулей категории \mathcal{O}_{int} , из свойств разложения по весовым подпространствам и свойств старших весов, справедлива теорема:

Теорема 3. *Каждый вектор $v \in V_\lambda^q$ может быть записан единственным образом в виде*

$$v = \sum_{k=1}^N X_i^{(k)} x_k = \sum_{k=1}^N Y_i^{(k)} y_k, \quad (45)$$

где введены обозначения $X_i^{(n)} = \frac{X_i^n}{[n]_{q_i}!}$, $Y_i^{(n)} = \frac{Y_i^n}{[n]_{q_i}!}$, и $N \in \mathbb{Z}_+$.

Также $x_k \in V_{\lambda+k\beta_i}^q \cap \text{Ker } Y_i$, $\forall k = 0, 1, \dots, N$. Набор $\{x_k\}$ определён однозначно для данного v и $x_k \neq 0$ только если $k + \frac{2(\beta_i, \lambda)}{(\beta_i, \beta_i)} \geq 0$.

Аналогично, $y_k \in V_{\lambda-k\beta_i}^q \cap \text{Ker } X_i$, $\forall k = 0, 1, \dots, N$. Набор $\{y_k\}$ определён однозначно для данного v и $y_k \neq 0$ только если $k - \frac{2(\beta_i, \lambda)}{(\beta_i, \beta_i)} \geq 0$.

Доказательство данной теоремы представлено в [12]. Модифицируем корневые операторы, введя операторы Кашивары:

Определение 27. Операторы Кашивары \tilde{X}_i и \tilde{Y}_i , где $i \in I$, определяются по правилу

$$\tilde{X}_i v = \sum_{k=1}^N X_i^{(k+1)} x_k = \sum_{k=1}^N Y_i^{(k-1)} y_k, \quad \tilde{Y}_i v = \sum_{k=1}^N X_i^{(k-1)} x_k = \sum_{k=1}^N Y_i^{(k+1)} y_k. \quad (46)$$

Замечательным является то обстоятельство, что эти операторы коммутируют с гомоморфизмами $U_q(\mathfrak{g})$. Более того, из определения операторов следует, что $\tilde{X}_i V_\lambda^q = X_i V_\lambda^q \subset V_{\lambda+\beta_i}^q$ и $\tilde{Y}_i V_\lambda^q = Y_i V_\lambda^q \subset V_{\lambda-\beta_i}^q$.

Далее стоит упомянуть мотивационный пример, который позволяет обосновать, чем же хорошо использование вводимых нами конструкций. Пусть, как и прежде, $U_q(sl(2, \mathbb{C})) = \langle X, Y, K, K^{-1} \rangle$. Рассмотрим, так называемое, естественное представление $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ -модуля $V^q = \mathbb{F}(q)v_+ \oplus \mathbb{F}(q)v_-$, где действие представления на его элементы определено следующим образом:

$$Xv_+ = 0, \quad Yv_+ = v_-, \quad Xv_- = v_+, \quad Yv_- = 0, \quad (47)$$

$$Kv_+ = qv_+, \quad Kv_- = q^{-1}v_-. \quad (48)$$

Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V$. Его базис будет выглядеть как

$$v_+ \otimes v_+, \quad v_+ \otimes v_-, \quad v_- \otimes v_+, \quad v_- \otimes v_-, \quad (49)$$

Но для того, чтобы он совпадал с базисом разложения представления на неприводимые $V(1) \otimes V(1) = V(2) \oplus V(0)$ при $q = 0$, лучше взять базис вида

$$v_+ \otimes v_+, \quad qv_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, \quad v_- \otimes v_-, \quad (50)$$

который при $q = 0$ совпадёт с базисом неприводимой компоненты разложения $V(2)$, и

$$v_+ \otimes v_- - qv_- \otimes v_+, \quad (51)$$

который при $q = 0$ будет порождать неприводимую компоненту $V(0)$ в разложении. Задача построения такого базиса, который будет иметь нужное нам поведение в кристаллическом пределе, и разрешается теорией кристаллических базисов. Теперь необходимо формализовать рецепт построения. Для этого сначала необходимо, как и в случае стремления $q \rightarrow 1$, определить понятие предела. Аналогично, рассмотрим кольцо $\mathbf{A}_0 = \{g/f | g, f \in \mathbb{F}[q], f(0) \neq 0\} \subset \mathbb{F}[q, q^{-1}]$, его максимальный идеал \mathbf{J}_0 , порождённый q . Из теорем общей алгебры известно, что существует изоморфизм

$$\mathbf{A}_0/\mathbf{J}_0 \simeq \mathbb{F}, \quad \text{где } f(q) + \mathbf{J}_0 \mapsto f(0). \quad (52)$$

Определение 28. Пусть $V^q - U_q(\mathfrak{g})$ -модуль из категории \mathcal{O}_{int}^q . Рассмотрим A_0 -подмодуль \mathcal{L} в V^q и назовём его кристаллической решёткой, если

1. $V = \mathbb{F}(q) \otimes_{A_0} \mathcal{L}$, или, иначе говоря, \mathcal{L} порождает V^q как векторное пространство над полем $\mathbb{F}(q)$,
2. $\mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathcal{L}_\lambda$, где $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} \cap V_\lambda^q$, $\forall \lambda \in P$,
3. $\tilde{X}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, $\tilde{Y}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, $\forall i \in I$.

Определение 29. Отображение

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/\mathbf{J}_0\mathcal{L} \simeq (\mathbf{A}_0/\mathbf{J}_0) \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L} = \mathcal{L}/q\mathcal{L} \quad (53)$$

называется кристаллическим пределом.

Будем обозначать \bar{v} образ $v \in \mathcal{L}$ под действием кристаллического предела. Заметим также, что операторы сохраняют кристаллическую решётку из третьего свойства её определения, поэтому они будут сохранять и $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$. Теперь у нас есть всё необходимое для рассмотрения понятия кристаллического базиса.

Определение 30. Кристаллическим базисом $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля V^q категории \mathcal{O}_{int}^q назовём пару $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ такую, что

1. \mathcal{L} — кристаллическая решётка V^q ,
2. \mathcal{B} — \mathbb{F} -базис $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$,
3. $\mathcal{B} = \bigsqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$, где $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda)$,
4. $\tilde{X}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$, $\tilde{Y}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$, $\forall i \in I$,
5. $\forall b, b' \in \mathcal{B}$ и $i \in I$, $\tilde{Y}_i b = b'$ справедливо $\iff b = \tilde{X}_i b'$.

Если рассматривать \mathcal{B} как множество вершин графа, со стрелками $b \xrightarrow{i} b'$ при отображениях $\tilde{Y}_i b = b'$, где $i \in I$, то такой граф будем называть кристаллическим. Именно этот граф и отражает структуру модуля.

Снова рассмотрим $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$, но теперь уже более формально, оперируя построенными выше конструкциями. Для $m \in \mathbb{Z}_+$ определим неприводимый $(m+1)$ -мерный $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ -модуль $V(m)$ с базисом $\{v, Yv, \dots, Y^{(m)}v\}$ и соотношениями (40), где $Xv = 0$, $Kv = q^m v$. Определим

$$\mathcal{L}(m) = \bigoplus_{k=0}^m \mathbf{A}_0 Y^{(k)}v, \quad \mathcal{B}(m) = \{\bar{v}, \bar{Yv}, \dots, \bar{Y^{(m)}v}\}. \quad (54)$$

По определению операторов Кашивары

$$\tilde{X}Y^{(k)}v = Y^{(k-1)}v, \quad \tilde{Y}Y^{(k)}v = Y^{(k+1)}v, \quad (55)$$

тогда кристаллический граф будет выглядеть вот таким образом:

$$\mathcal{B}(m) : \bar{v} \rightarrow \bar{Yv} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{Y^{(m)}v}. \quad (56)$$

Обсудим теперь поведение всей конструкции относительно тензорного произведения модулей. Для начала отметим следующую теорему. Далее все модули принадлежат категории \mathcal{O}_{int}^q , если не оговорено обратное.

Теорема 4. Пусть $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1)$ — кристаллический базис модуля V_1 , а $(\mathcal{L}_2, \mathcal{B}_2)$ — кристаллический базис модуля V_2 . Кристаллический базис $(\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2)$ соответствует модулю V тогда и только тогда, когда $V = V_1 \oplus V_2$.

Доказательство представлено в [12].

Определение 31. Пусть $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda$ — модуль с кристаллическим базисом $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$. Для $i \in I$ и $b \in \mathcal{B}_\lambda$ определим операторы $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{X}_i^k b \in \mathcal{B}\} \quad (57)$$

$$\varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{Y}_i^k b \in \mathcal{B}\} \quad (58)$$

Отметим сразу же несколько свойств этих операторов. Имеем $\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \lambda(h_i)$ и

$$\begin{aligned}\varphi_i(\tilde{X}_i b) &= \varphi_i(b) + 1, & \varphi_i(\tilde{Y}_i b) &= \varphi_i(b) - 1, \\ \varepsilon_i(\tilde{X}_i b) &= \varepsilon_i(b) - 1, & \varepsilon_i(\tilde{Y}_i b) &= \varepsilon_i(b) + 1,\end{aligned}\tag{59}$$

для $\tilde{X}_i b, \tilde{Y}_i b \in \mathcal{B}$. Следующая теорема называется правилом тензорного произведения.

Теорема 5. Пусть $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1)$ — кристаллический базис модуля V_1 , а $(\mathcal{L}_2, \mathcal{B}_2)$ — кристаллический базис модуля V_2 . Кристаллический базис $(\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L}_2, \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ является базисом $V_1 \otimes_{\mathbf{F}(q)} V_2$, где действие операторов Кашивары определено следующим образом:

$$\tilde{X}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{X}_i b_1 \otimes b_2, & \text{если } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{X}_i b_2, & \text{если } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \end{cases}\tag{60}$$

$$\tilde{Y}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{Y}_i b_1 \otimes b_2, & \text{если } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{Y}_i b_2, & \text{если } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \end{cases}\tag{61}$$

где $b_1 \oplus b_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

Вернёмся к нашему примеру с неприводимым $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ -модулем $V(2)$ и продемонстрируем его в действии. Проинтерпретировать правило тензорного произведения можно следующим образом: берём поочерёдно вектора из $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, сначала применяем оператор Y , идя как можно дальше вправо, а затем вниз. Пусть $(\mathcal{L}(2), \mathcal{B}(2))$ — кристаллический базис $V(2)$. Тогда кристаллический граф для $\mathcal{B}(2) \otimes \mathcal{B}(2)$ будет выглядеть так:

$$\begin{array}{ccccc}\bar{v} \otimes \bar{v} & \longrightarrow & \overline{Yv} \otimes \bar{v} & \longrightarrow & \overline{Y^{(2)}v} \otimes \bar{v} \\ & & & & \downarrow \\ \bar{v} \otimes \overline{Yv} & \longrightarrow & \overline{Yv} \otimes \overline{Yv} & & \overline{Y^{(2)}v} \otimes \overline{Yv} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{v} \otimes \overline{Y^{(2)}v} & & \bar{v} \otimes \overline{Y^{(2)}v} & & \overline{Y^{(2)}v} \otimes \overline{Y^{(2)}v}\end{array}\tag{62}$$

Связные компоненты графа представляют из себя неприводимые компоненты, откуда мгновенно следует искомое разложение $V(2) \otimes V(2) = V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$.

Теперь следует обсудить правило разложения многокомпонентного N -кратного тензорного произведения. Пускай имеем набор модулей V_j с кристаллическими базисами $(\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j)$, где $j = 1, \dots, N$. Зафиксируем $i \in I$ и рассмотрим вектор $b = b_1 \otimes \dots \otimes b_N \in \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_N$. Каждому $b_j \in \mathcal{B}_j$ сопоставляется последовательность плюсов и минусов таким образом, что количество плюсов в ней равно $\varepsilon_i(b_j)$, а количество минусов равно $\varphi_i(b_j)$:

$$b = b_1 \otimes \dots \otimes b_N \mapsto (\underbrace{-, \dots, -}_{\varepsilon_i(b_1)}, \underbrace{+, \dots, +}_{\varphi_i(b_1)}, \dots, \underbrace{-, \dots, -}_{\varepsilon_i(b_N)}, \underbrace{+, \dots, +}_{\varphi_i(b_N)}).\tag{63}$$

Далее, необходимо вычеркнуть все пары $(+, -)$, в результате чего получится последовательность плюсов и минусов, называемая i -сигнатурой

$$i\text{-sgn}(b) = (-, -, -, \dots, +, +, +), \quad (64)$$

где далее оператор \tilde{X}_i будет действовать на b_{j_i} , соответствующий последнему минусу в данной последовательности, а \tilde{Y}_i будет действовать на b_k , соответствующий последнему плюсу

$$\tilde{X}_i b = b_1 \otimes \dots \otimes \tilde{X}_i b_{j_i} \otimes \dots \otimes b_N, \quad \tilde{Y}_i b = b_1 \otimes \dots \otimes \tilde{Y}_i b_k \otimes \dots \otimes b_N. \quad (65)$$

Рассмотрим пример с неприводимым $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ -модулем $V(3)$, его кристаллическим базисом $(\mathcal{L}(3), \mathcal{B}(3))$. Возьмём тензорное произведение $V(3) \otimes V(3) \otimes V(3) \otimes V(3)$, и, соответственно, $\mathcal{B}(3) \otimes \mathcal{B}(3) \otimes \mathcal{B}(3) \otimes \mathcal{B}(3)$. Выберем в нём какой-то определённый вектор и посмотрим, что получится:

$$b = \overline{Yv} \otimes \overline{Y^{(3)}v} \otimes \overline{Y^{(2)}v} \otimes \overline{Yv} \mapsto (- + +, - - -, - - +, - + +). \quad (66)$$

Значит $i\text{-sgn}(b) = (-, -, -, +)$, а значит действие оператора Кашияра будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{X}b = \overline{Yv} \otimes \overline{Y^{(3)}v} \otimes \overline{Yv} \otimes \overline{Yv}, \quad \tilde{Y}b = \overline{Yv} \otimes \overline{Y^{(3)}v} \otimes \overline{Y^{(2)}v} \otimes \overline{Y^{(2)}v}. \quad (67)$$

Далее, соединяя вектор b стрелками с $\tilde{X}b$ и $\tilde{Y}b$ и применяя к ним аналогичную операцию получим связную компоненту, соответствующую одному из неприводимых модулей в разложении тензорного произведения $V(3) \otimes V(3) \otimes V(3) \otimes V(3)$. Такие манипуляции необходимо проделать для всех векторов из $\mathcal{B}(3) \otimes \mathcal{B}(3) \otimes \mathcal{B}(3) \otimes \mathcal{B}(3)$, тем самым получив кристаллический граф. Это же разложение сохраняется и для модулей $sl(2, \mathbb{C})$.

Обоснование этого правила можно прочесть в [12].

Резюмируя, проясним суть происходящего на менее формальном языке. Для общего случая алгебры Ли \mathfrak{g} , мы можем рассмотреть каждый из её простых ненулевых корней β . С каждым из них можно ассоциировать генераторы $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$ и $Y_\beta \in \mathfrak{g}^{-\beta}$, а также $H_\beta = [X_\beta, Y_\beta]$, по теореме 1. Таким образом, к каждому простому ненулевому корню может быть, говоря нестрого, присоединена структура, изоморфная алгебре sl_2 . Если мы рассматриваем конечномерный \mathfrak{g} -модуль V , то для фиксированного β можно найти в нём базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ такой, что $Y_\beta v_i$ равняется либо 0, либо другому ненулевому вектору v_j , а также такой, что $X_\beta v_k$ равняется либо 0, либо другому ненулевому вектору v_l . Конечно же, такой базис не будет работать сразу для всего набора простых корней. Однако, построив универсальную обёртывающую нашей алгебры и продеформировав её параметром q , мы получим $U_q(\mathfrak{g})$, или же, говоря интуитивно, целую совокупность всевозможных алгебр, построенных деформациями начальной. Для $U_q(\mathfrak{g})$ мы можем построить такой базис в более общем случае, для деформированной весовой решётки. Вся необходимая информация содержится в поведении этого базиса в кристаллическом пределе $q \rightarrow 0$. После того, как необходимы сведения получены, мы можем избавиться от деформации в классическом пределе $q \rightarrow 1$, придя тем самым к желаемому результату уже для всей совокупности корней β алгебры Ли \mathfrak{g} .

2.6 Разложение тензорного произведения представлений алгебры Ли $su(3)$

В данном параграфе мы продемонстрируем как работает весь описанный выше аппарат на примере алгебры A_2 и её фундаментального представления, взятого в тензорной степени равной трём. В предыдущих параграфах были построены её фундаментальные представления, матрица Картана, корневые и весовые диаграммы, коммутационные соотношения. Всюду рассматривается так называемое определяющее представление (его также называют первым фундаментальным), в дальнейшем будем называть его фундаментальным. Переформулируем всё известное нам в рамках формализма алгебр Каца-Муди.

Рассмотрим генераторы алгебры в виде матричных единичек

$$X_i = E_{i,i+1}, \quad Y_i = E_{i+1,i}, \quad H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}.$$

Таким образом мы имеем $H_i, X_i, Y_i, i = 1, 2$. Обозначим вектора определяющего представления через $e_i, i = 1, 2, 3$. Они же $\nu_i, i = 1, 2, 3$ на диаграмме 3. Также заметим, что $e_1 \equiv w$ является старшим весом определяющего представления. Тогда простые корни, соответствующие генератором подалгебры Картана будут иметь вид

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3.$$

Тогда, в соответствии с определениями в начале параграфа 2.4,

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \Pi^\vee = \{H_1, H_2\},$$

$$P = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2, \quad P^\vee = \mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2.$$

Тогда $V = \bigoplus_{j=1}^3 \mathbb{C}(q)e_j$ — пространство представления, переходящее в

$U_q(su(3))$ -модуль, где действие операторов алгебры определено соответствующим с параграфом 2.5 образом и введены обозначения:

$$\begin{aligned} X^i &= \frac{X_i}{[i]_q!}, \quad Y^i = \frac{Y_i}{[i]_q!}, \\ X^i e_j &= \begin{cases} e_i, & \text{если } j = i + 1 \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}, \\ Y^i e_j &= \begin{cases} e_{i+1}, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}, \\ K^i e_j &= \begin{cases} qe_j, & \text{если } i = j \\ q^{-1}e_j, & \text{если } i = j \\ e_j, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким образом базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ запишется в виде $\{w, Y^1 w, Y^2 Y^1 w\}$. Далее

$$\mathcal{L} = \mathbf{A}_0 w \oplus \mathbf{A}_0 Y^1 w \oplus \mathbf{A}_0 Y^2 Y^1 w, \quad \mathcal{B} = \{\bar{w}, \overline{Y^1 w}, \overline{Y^2 Y^1 w}\},$$

где черта над вектором означает образ под действием взятия кристаллического предела, и пара $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ — кристаллический базис.

Найдём значения функций ε_i и φ_i .

$$\begin{aligned} Y^1 e_1 = e_2 &\Rightarrow \varphi_1(e_1) = 1, & Y^2 e_1 = 0 &\Rightarrow \varphi_2(e_1) = 0, \\ X^1 e_1 = 0 &\Rightarrow \varepsilon_1(e_1) = 0, & X^2 e_1 = 0 &\Rightarrow \varepsilon_2(e_1) = 0, \\ Y^1 e_2 = 0 &\Rightarrow \varphi_1(e_2) = 0, & Y^2 e_2 = e_3 &\Rightarrow \varphi_2(e_2) = 1, \\ X^1 e_2 = e_1 &\Rightarrow \varepsilon_1(e_2) = 1, & X^2 e_2 = 0 &\Rightarrow \varepsilon_2(e_2) = 0, \\ Y^1 e_3 = 0 &\Rightarrow \varphi_1(e_3) = 0, & Y^2 e_3 = 0 &\Rightarrow \varphi_2(e_3) = 0, \\ X^1 e_3 = 0 &\Rightarrow \varepsilon_1(e_3) = 0, & X^2 e_3 = e_2 &\Rightarrow \varepsilon_2(e_3) = 1. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим тензорную степень равную трём данного представления. Базис будет состоять из всевозможных векторов вида $e_i \otimes e_j \otimes e_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Им необходимо сопоставить последовательность плюсов и минусов в соответствии с каждым оператором Y^1 и Y^2 , как описано в параграфе 2.5. Для экономии места мы изложим сами последовательности, построение i -сигнатуры представляется тривиальным.

$$\begin{aligned} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 &\rightarrow (, +, , +, , +)_1; & (, , , , ,)_2, \\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 &\rightarrow (, +, -, , , +)_1; & (, , , +, ,)_2, \\ e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 &\rightarrow (, +, , , , +)_1; & (, , -, , ,)_2, \\ e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 &\rightarrow (-, , , +, , +)_1; & (, +, , , ,)_2, \\ e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 &\rightarrow (-, , -, , , +)_1; & (, +, , +, ,)_2, \\ e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 &\rightarrow (-, , , , , +)_1; & (, +, -, , ,)_2, \\ e_3 \otimes e_1 \otimes e_1 &\rightarrow (, , , +, , +)_1; & (-, , , , ,)_2, \\ e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 &\rightarrow (, , -, , , +)_1; & (-, , , +, ,)_2, \\ e_3 \otimes e_3 \otimes e_1 &\rightarrow (, , , , , +)_1; & (-, , -, , ,)_2, \\ e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 &\rightarrow (, +, , +, -,)_1; & (, , , , , +)_2, \\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 &\rightarrow (, +, -, , -,)_1; & (, , , +, , +)_2, \\ e_1 \otimes e_3 \otimes e_2 &\rightarrow (, +, , , -,)_1; & (, , -, , , +)_2, \\ e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 &\rightarrow (-, , , +, -,)_1; & (, +, , , , +)_2, \\ e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 &\rightarrow (-, , -, , -,)_1; & (, +, , +, , +)_2, \\ e_2 \otimes e_3 \otimes e_2 &\rightarrow (-, , , , -,)_1; & (, +, -, , , +)_2, \\ e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 &\rightarrow (, , , +, -,)_1; & (-, , , , , +)_2, \\ e_3 \otimes e_2 \otimes e_2 &\rightarrow (, , -, , -,)_1; & (-, , , +, , +)_2, \\ e_3 \otimes e_3 \otimes e_2 &\rightarrow (, , , , -,)_1; & (-, , -, , , +)_2, \\ e_1 \otimes e_1 \otimes e_3 &\rightarrow (, +, , +, ,)_1; & (, , , , -,)_2, \\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 &\rightarrow (, +, -, , ,)_1; & (, , , +, -,)_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes e_3 \otimes e_3 &\rightarrow (, +, , , ,)_1; \quad (, , -, , -,)_2, \\
e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 &\rightarrow (-, , , +, , ,)_1; \quad (, +, , , -,)_2, \\
e_2 \otimes e_2 \otimes e_3 &\rightarrow (-, , -, , , ,)_1; \quad (, +, , +, -,)_2, \\
e_2 \otimes e_3 \otimes e_3 &\rightarrow (-, , , , , ,)_1; \quad (, +, -, , -,)_2, \\
e_3 \otimes e_1 \otimes e_3 &\rightarrow (, , , +, , ,)_1; \quad (-, , , , -,)_2, \\
e_3 \otimes e_2 \otimes e_3 &\rightarrow (, , -, , , ,)_1; \quad (-, , , +, -,)_2, \\
e_3 \otimes e_3 \otimes e_3 &\rightarrow (, , , , , ,)_1; \quad (-, , -, , -,)_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим как операторы будут действовать на эти вектора. Часть из них перейдут в ноль, а часть – нет. Опишем те вектора, образ которых нетривиален под действием Y^1 .

$$\begin{aligned}
Y^1(e_1 \otimes e_1 \otimes e_1) &= Y^1 e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 = e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, \\
Y^1(e_1 \otimes e_2 \otimes e_1) &= e_1 \otimes e_2 \otimes Y^1 e_1 = e_1 \otimes e_2 \otimes e_2, \\
Y^1(e_1 \otimes e_3 \otimes e_1) &= Y^1 e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 = e_2 \otimes e_3 \otimes e_1, \\
Y^1(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1) &= e_2 \otimes Y^1 e_1 \otimes e_1 = e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, \\
Y^1(e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) &= e_2 \otimes e_2 \otimes Y^1 e_1 = e_2 \otimes e_2 \otimes e_2, \\
Y^1(e_2 \otimes e_3 \otimes e_1) &= e_2 \otimes e_3 \otimes Y^1 e_1 = e_2 \otimes e_3 \otimes e_2, \\
Y^1(e_3 \otimes e_1 \otimes e_1) &= e_3 \otimes Y^1 e_1 \otimes e_1 = e_3 \otimes e_2 \otimes e_1, \\
Y^1(e_3 \otimes e_2 \otimes e_1) &= e_3 \otimes e_2 \otimes Y^1 e_1 = e_3 \otimes e_2 \otimes e_2, \\
Y^1(e_3 \otimes e_3 \otimes e_1) &= e_3 \otimes e_3 \otimes Y^1 e_1 = e_3 \otimes e_3 \otimes e_2, \\
Y^1(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) &= Y^1 e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1 \otimes e_2, \\
Y^1(e_1 \otimes e_1 \otimes e_3) &= Y^1 e_1 \otimes e_1 \otimes e_3 = e_2 \otimes e_1 \otimes e_3, \\
Y^1(e_1 \otimes e_3 \otimes e_3) &= Y^1 e_1 \otimes e_3 \otimes e_3 = e_2 \otimes e_3 \otimes e_3, \\
Y^1(e_2 \otimes e_1 \otimes e_3) &= e_2 \otimes Y^1 e_1 \otimes e_3 = e_2 \otimes e_2 \otimes e_3, \\
Y^1(e_3 \otimes e_1 \otimes e_3) &= e_3 \otimes Y^1 e_1 \otimes e_3 = e_3 \otimes e_2 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

Аналогично для оператора Y^2 .

$$\begin{aligned}
Y^2(e_1 \otimes e_2 \otimes e_1) &= e_1 \otimes Y^2 e_2 \otimes e_1 = e_1 \otimes e_3 \otimes e_1, \\
Y^2(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1) &= Y^2 e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 = e_3 \otimes e_1 \otimes e_1, \\
Y^2(e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) &= Y^2 e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 = e_3 \otimes e_2 \otimes e_1, \\
Y^2(e_3 \otimes e_2 \otimes e_1) &= e_3 \otimes Y^2 e_2 \otimes e_1 = e_3 \otimes e_3 \otimes e_1, \\
Y^2(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) &= e_1 \otimes e_1 \otimes Y^2 e_2 = e_1 \otimes e_1 \otimes e_3, \\
Y^2(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2) &= e_1 \otimes Y^2 e_2 \otimes e_2 = e_1 \otimes e_3 \otimes e_2, \\
Y^2(e_1 \otimes e_3 \otimes e_2) &= e_1 \otimes e_3 \otimes Y^2 e_2 = e_1 \otimes e_3 \otimes e_3, \\
Y^2(e_2 \otimes e_1 \otimes e_2) &= Y^2 e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 = e_3 \otimes e_1 \otimes e_2, \\
Y^2(e_2 \otimes e_2 \otimes e_2) &= Y^2 e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 = e_3 \otimes e_2 \otimes e_2, \\
Y^2(e_2 \otimes e_3 \otimes e_2) &= e_2 \otimes e_3 \otimes Y^2 e_2 = e_2 \otimes e_3 \otimes e_3, \\
Y^2(e_3 \otimes e_1 \otimes e_2) &= e_3 \otimes e_1 \otimes Y^2 e_2 = e_3 \otimes e_1 \otimes e_3, \\
Y^2(e_3 \otimes e_2 \otimes e_2) &= e_3 \otimes Y^2 e_2 \otimes e_2 = e_3 \otimes e_3 \otimes e_2, \\
Y^2(e_3 \otimes e_3 \otimes e_2) &= e_3 \otimes e_3 \otimes Y^2 e_2 = e_3 \otimes e_3 \otimes e_3, \\
Y^2(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3) &= Y^2 e_2 \otimes e_2 \otimes e_3 = e_3 \otimes e_2 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

Теперь мы имеем возможность нарисовать кристаллический граф 6.

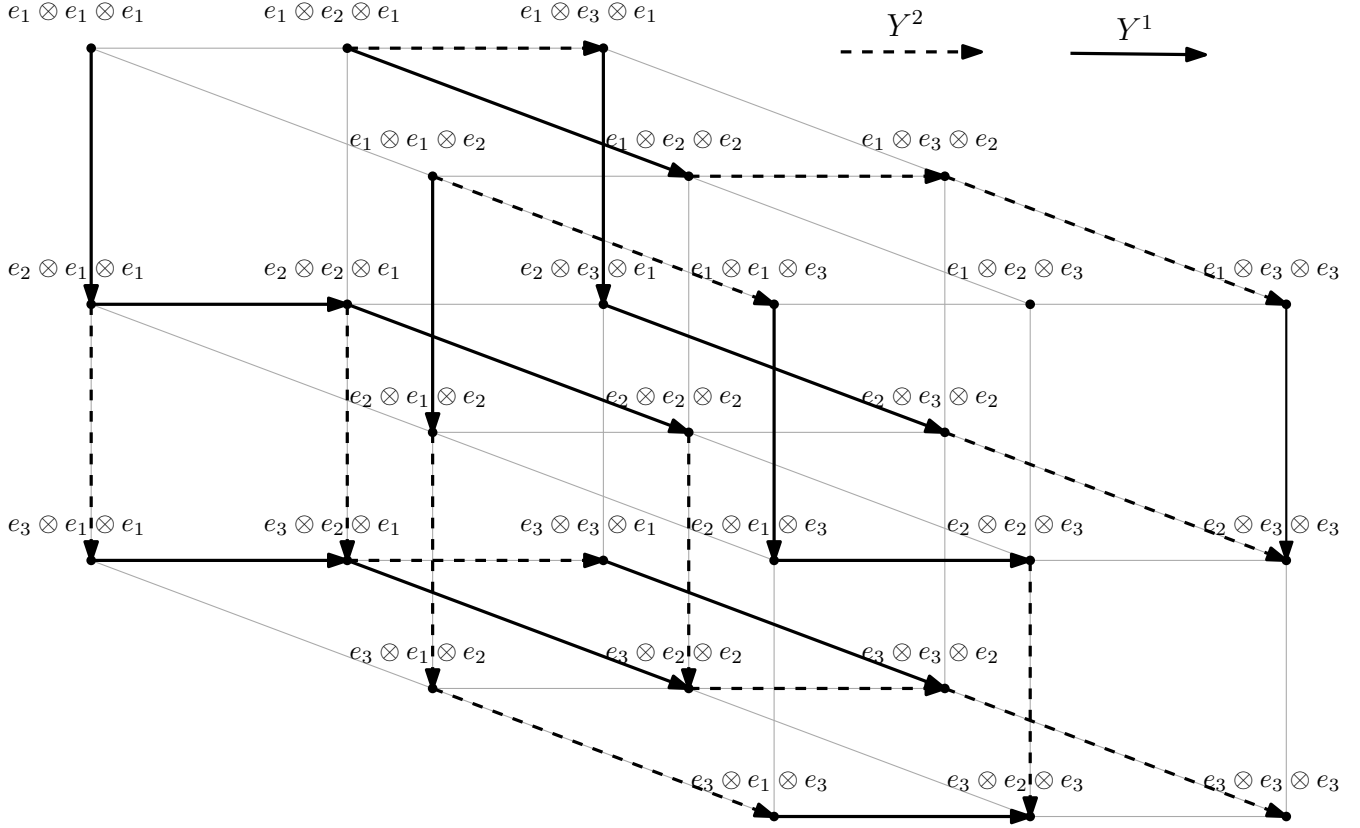


Рис. 6: Кристаллический граф третьей степени тензорного произведения фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$

Для удобства изобразим компоненты связности графа, которые будут являться неприводимыми компонентами в разложении тензорного произведения 7.

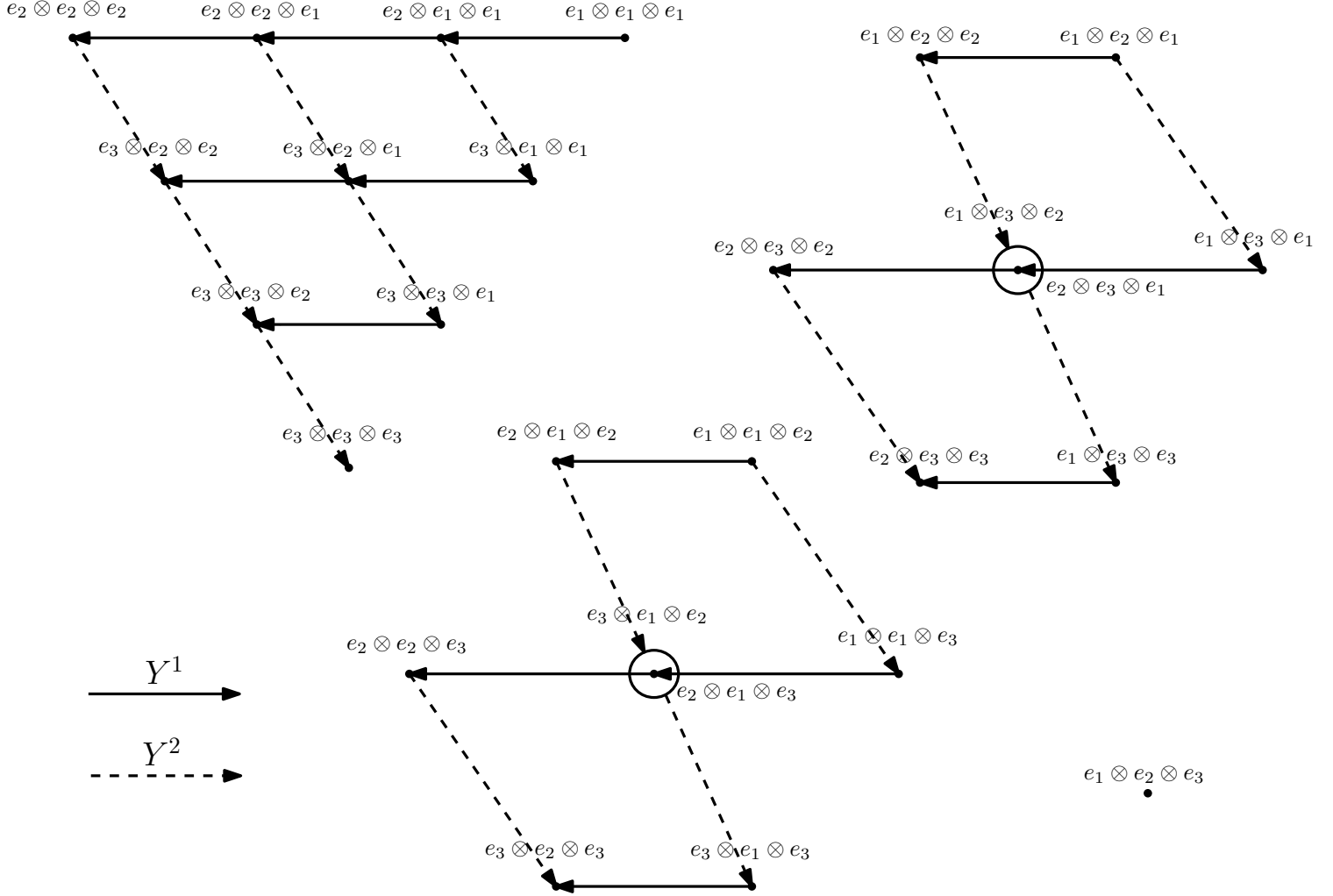


Рис. 7: Компоненты связности кристаллического графа

Таким образом был получен ответ, совпадающий с представленным на рисунке 5, но в отличие от графического метода, здесь мы имеем возможность получить ещё и базис, в котором пространство представления разлагается в сумму инвариантных подпространств. В данном случае в узлах кристаллического графа находятся вектора в пределе $q \rightarrow 0$, однако хотелось бы получить их в классическом пределе, то есть при $q \rightarrow 1$. Для этого нам понадобятся схемы Юнга. Каждое представление алгебры Ли однозначно задаётся вектором старшего веса. Для алгебр Ли серии A_n их можно описывать индексами Дынкина, которые задают нам вектор старшего веса в виде линейной комбинации старших весов фундаментальных представлений этой же алгебры. Эти индексы можно выразить с помощью

схемы Юнга определённой формы. Максимальная длина столбика схемы будет равна n , а каждый из индексов Дынкина будет задавать нам число столбцов определенной длины, входящей в схему. Затем, каждый из векторов в вершинах кристаллического графа можно описать заполнением таблицы, соответствующей тому представлению, в которое входит рассматриваемый вектор. Существует два способа чтения таблиц, и в нашем случае мы выберём так называемый дальневосточный: заполнение таблиц происходит справа налево по строчке и сверху вниз по столбцам. Далее, после того, как таблица заполнена, необходимо провести её симметризацию по строке и антисимметризацию по столбцам, причём сперва выполняется симметризация. Иначе говоря, чтобы линейная комбинация на выходе меняла знак при смене местами двух цифр в столбце и не меняла знак при смене местами двух цифр в строке. Рассмотрим в качестве примера вектор из присоединенного представления и вектор из синглета:

$$e_2 \otimes e_2 \otimes e_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Таким образом с учётом нормировочного множителя мы имеем

$$e_2 \otimes e_2 \otimes e_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_2),$$

$$e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \rightarrow \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_1).$$

Довольно очевидным является то обстоятельство, что процедура построения кристаллических базисов допускает алгоритмизацию. Нами будет предложен алгоритм и его реализация в системе MATLAB, которая будет использована для нахождения спектра поставленной нами задачи.

3 Спиновые цепочки и алгебраический анзац Бёте

3.1 Формализм Лакса

Теперь рассмотрим подробнее модель спиновой цепочки, к которой впоследствии и будет приложен весь исследованный нами математический аппарат. Изложение будет в большей степени вестись в соответствии с лекциями Л. Д. Фаддеева [24].

Главным образом будем рассматривать множество дискретных узлов с периодическим граничным условием $n = n + N$, где N – целое число, играющее роль объёма системы. Для введения алгебры операторов, соответствующих квантовомеханическим наблюдаемым \mathcal{A} необходимо сперва выбрать пространство её представления, а именно, рассмотрим тензорное произведение гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{n=1}^N h_n, \quad (1)$$

далее перейдём к рассмотрению динамических переменных, действующих в этом пространстве на каждом из узлов решётки

$$X_n^\alpha = I \otimes I \otimes \dots \otimes \underbrace{X_n^\alpha}_n \otimes \dots \otimes I. \quad (2)$$

Задав коммутационные соотношения данных операторов и задав представление их алгебры мы опишем нашу квантовую систему.

Рассмотрим конкретную реализацию спиновой цепочки: модель $XYZ_{\frac{1}{2}}$. В качестве алгебры наблюдаемых выберем алгебру Ли $sl(2, \mathbb{C})$

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma. \quad (3)$$

Её фундаментальное представление в пространстве $h = \mathbb{C}^2$ реализуется матрицами Паули

$$S^\alpha = \frac{\hbar}{2} \sigma^\alpha, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

А значит для всей цепочки в пространстве $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ коммутационные соотношения на операторы из алгебры динамических переменных будут иметь вид

$$[S_n^\alpha, S_m^\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_n^\gamma \delta_{nm}. \quad (5)$$

Гамильтониан будет иметь вид

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 J^\alpha S_n^\alpha S_{n+1}^\alpha, \quad (6)$$

где вещественные константы J^α отражают анизотропию обменной энергии. Взаимодействие между узлами ультралокальное. При суммировании учтены граничные условия на узлы $S_{N+1}^\alpha = S_1^\alpha$, для $\alpha = 1, \dots, 3$.

Данную реализацию можно модифицировать до взаимодействия, не являющегося ультралокальным, выбрав в качестве алгебры наблюдаемых деформированную алгебру $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$. Для операторов S_n^α необходимо фиксировать индекс n , нумерующий узлы решётки и рассмотреть генераторы S^+ , S^- , S^3 .

$$q^{S^3} S^\pm = q^{\pm 1} S^\pm q^{S^3}, \quad (7)$$

$$[S^+, S^-] = \frac{(q^{S^3})^2 - (q^{S^3})^{-2}}{q - q^{-1}}. \quad (8)$$

Стоит заметить, что таким образом, деформируя алгебру, можно перейти, например, от $XX_{\frac{1}{2}}$ модели к $XXZ_{\frac{1}{2}}$. Также важно, что вышеописанные соотношения при $q \rightarrow 1$ стремятся к соотношениям для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, где $S^\pm = S^1 \pm iS^2$.

Рассмотрим более частный случай модели спиновой цепочки, а именно, изотропный случай, когда $J^1 = J^2 = J^3$. Эту модель обозначают $XX_{\frac{1}{2}}$. Гамильтониан будет иметь вид

$$H = J \sum_{n=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^3 S_n^\alpha S_{n+1}^\alpha - \frac{I}{4} \right). \quad (9)$$

В зависимости от знака J различают ферромагнитный ($J < 0$) и антиферромагнитный ($J > 0$) случаи. Займёмся нахождением точного решения данной модели, а именно, найдём все собственные значения Гамильтониана. Опишем алгебраический подход, который позволит нам их вычислить, а также найти интегралы движения.

Определение 1. Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – дополнительное пространство. Оператором Лакса называется оператор $L_n(\lambda) : V \otimes \mathcal{H} \rightarrow V \otimes \mathcal{H}$ вида

$$L_n(\lambda) = \lambda I \otimes I^N + i \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^\alpha \otimes S_n^\alpha, \quad (10)$$

где λ – спектральный параметр.

В дополнительном пространстве оператор Лакса имеет вид

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I^N + \frac{i}{2} \sigma_n^3 & \frac{i}{2} (\sigma_n^1 - i \sigma_n^2) \\ \frac{i}{2} (\sigma_n^1 + i \sigma_n^2) & \lambda I^N - \frac{i}{2} \sigma_n^3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Данные операторы образуют алгебру и имеют смысл связности в спиновой цепочке

$$L_n \psi_n = \psi_{n+1}. \quad (12)$$

Определение 2. Пусть $V_1 \simeq V_2$. Рассмотрим $P_{1,2} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$ такой, что

$$P_{1,2}(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2. \quad (13)$$

Тогда $P_{1,2}$ – оператор перестановки.

Помимо некоторых тривиальных свойств стоит отметить, что в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ он имеет вид

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \left(I \otimes I + \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha \right). \quad (14)$$

Оператор Лакса можно записать в виде

$$L_n(\lambda) = \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) I \otimes I^N + iP_{n,1}. \quad (15)$$

Далее можно заметить, что оператор Лакса в такой нотации удовлетворяет соотношению

$$R(\lambda - \mu)L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu) = L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)R(\lambda - \mu), \quad (16)$$

где оператор R существует и имеет вид

$$R(\lambda) = \lambda I + iP_{1,2}, \quad (17)$$

или

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{\lambda}{\lambda+i}, \\ c(\lambda) &= \frac{i}{\lambda+i}. \end{aligned} \quad (19)$$

R -матрица является аналогом структурных констант, что в некотором смысле видно из соотношения (16).

Определение 3. Оператором монодромии называется

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda). \quad (20)$$

Он, как и любой оператор Лакса, будет удовлетворять соотношению 16. В дополнительном пространстве оператор монодромии имеет вид

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Из соотношения (16) нетрудно получить, что

$$\begin{cases} [B_N(\lambda), B_N(\mu)] = 0 \\ A_N(\lambda)B_N(\mu) = \frac{\lambda-\mu-i}{\lambda-\mu} B_N(\mu)A_N(\lambda) + \frac{i}{\lambda-\mu} B_N(\lambda)A_N(\mu) \\ D_N(\lambda)B_N(\mu) = \frac{\lambda-\mu+i}{\lambda-\mu} B_N(\mu)D_N(\lambda) - \frac{i}{\lambda-\mu} B_N(\lambda)D_N(\mu) \end{cases} \quad (22)$$

Определение 4. Рассмотрим след оператора монодромии в дополнительном пространстве и назовём его трансфер-матрицей

$$F(\lambda) = \text{Tr} T_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda). \quad (23)$$

Считая матрицу R невырожденной, домножим 16 на $R^{-1}(\lambda - \mu)$ слева:

$$T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu) = R^{-1}(\lambda - \mu) T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda) R(\lambda - \mu).$$

Возьмём след в пространстве V :

$$\begin{aligned} F(\lambda)F(\mu) &= \mathbf{Tr}(T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)) = \mathbf{Tr}\left(R^{-1}(\lambda - \mu) T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda) R(\lambda - \mu)\right) = \\ &= \mathbf{Tr}\left(R^{-1}(\lambda - \mu) R(\lambda - \mu) T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)\right) = \mathbf{Tr}(T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)) = F(\mu)F(\lambda). \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что трансфер-матрицы коммутируют:

$$[F(\lambda), F(\mu)] = 0. \quad (24)$$

Отметим, что $F(\lambda)$ является производящей функцией для набора квантовых интегралов движения. Перед переходом к решению задачи нам понадобится ещё одно понятие.

Определение 5. Назовём псевдовакуумом вектор в \mathcal{H} вида

$$|\Omega\rangle := \bigotimes_{n=1}^N \omega_n, \quad (25)$$

где $\omega_n := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим действие оператора Лакса на вектор ω_n

$$L_n(\lambda)\omega_n = \begin{pmatrix} \left(\lambda \mathbb{I}^N + \frac{i}{2}\sigma_n^3\right)\omega_n & \left(\frac{i}{2}(\sigma_n^1 - i\sigma_n^2)\right)\omega_n \\ \left(\frac{i}{2}(\sigma_n^1 + i\sigma_n^2)\right)\omega_n & \left(\lambda \mathbb{I}^N - \frac{i}{2}\sigma_n^3\right)\omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)\omega_n & ie^- \\ 0 & \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)\omega_n \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}^{N-1},$$

где $e^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. А значит оператор монодромии будет действовать на псевдовакуум следующим образом

$$T_N(\lambda)|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N |\Omega\rangle & i^N (ie^-)^{\otimes N} \\ 0 & \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N |\Omega\rangle \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно выписать соотношения

$$\begin{cases} A(\lambda)|\Omega\rangle = \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N |\Omega\rangle \\ D(\lambda)|\Omega\rangle = \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N |\Omega\rangle \\ C(\lambda)|\Omega\rangle = \mathbf{0} \end{cases} \quad (26)$$

Значит, вектор псевдовакуума является собственным для операторов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, а значит и для оператора $F(\lambda)$, что понадобится нам в дальнейшем. Третье выражение позволяет находить вектор псевдовакуума.

3.2 Уравнения Бёте и спектр трансфер-матрицы

Как было уже сказано, трансфер-матрица является производящей функцией набора квантовых интегралов движения. Чтобы получить этот набор нам необходимо найти остальные собственные вектора и собственные значения трансфер-матрицы.

Собственные вектора будем искать в виде подстановки (анзаца) Бете:

$$|\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_l)\rangle := B_N(\lambda_1) \dots B_N(\lambda_l) |\Omega\rangle. \quad (27)$$

Без доказательства отметим, что подстановка данного вида действительно описывает все собственные вектора. Теперь поэтапно вычислим действие операторов на анзац.

Найдём $A(\mu) |\Psi(\{\lambda\})\rangle$. Чтобы пронести оператор A через m операторов B , необходимо применить 2 равенство из системы условий (22) l раз, на каждом шаге получая два разных слагаемых. Таким образом, мы получим 2^l слагаемых, но без доказательства отметим, что линейно независимыми из них будут лишь $l + 1$. Слагаемые из правой части 2 равенства в (22) будем называть первым и вторым вариантами коммутации, соответственно. Тогда можно написать:

$$A(\mu) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) = G(\mu|\{\lambda\}) \cdot \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) A(\mu) + \sum_{k=1}^m G_k(\mu|\{\lambda\}) B(\mu) \prod_{j=1, j \neq k}^l B(\lambda_j) A(\lambda_k). \quad (28)$$

Вычислим коэффициенты. В первом случае, используя только первый вариант коммутации, имеем:

$$G(\mu|\{\lambda\}) = \prod_{j=1}^l \frac{\mu - \lambda_j - i}{\mu - \lambda_j}.$$

Во втором случае мы воспользуемся сначала вторым вариантом, а затем всюду первым и тогда:

$$G_k(\mu|\{\lambda\}) = \frac{i}{\mu - \lambda_k} \prod_{j=1, j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j - i}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

Используя (28) и (26), получаем:

$$A(\mu) |\Psi(\{\lambda\})\rangle = \left(\mu + \frac{i}{2}\right)^N G(\mu|\{\lambda\}) |\Psi(\{\lambda\})\rangle + \sum_{k=1}^l \left(\lambda_k + \frac{i}{2}\right)^N G_k(\mu|\{\lambda\}) B(\mu) \prod_{j \neq k}^l B(\lambda_j) |\Omega\rangle. \quad (29)$$

Найдём $D(\mu) |\Psi(\{\lambda\})\rangle$. Используя 3 равенство из (22), имеем:

$$D(\mu) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) = W(\mu|\{\lambda\}) \cdot \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) D(\mu) + \sum_{k=1}^l W_k(\mu|\{\lambda\}) B(\mu) \prod_{j=1, j \neq k}^l B(\lambda_j) D(\lambda_k). \quad (30)$$

В первом случае, имеем:

$$W(\mu|\{\lambda\}) = \prod_{j=1}^l \frac{\mu - \lambda_j + i}{\mu - \lambda_j}.$$

Во втором случае, имеем:

$$W_k(\mu|\{\lambda\}) = \frac{-i}{\mu - \lambda_k} \prod_{j=1, j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

Используя (30) и (26), получаем:

$$D(\mu) |\Psi(\{\lambda\})\rangle = \left(\mu - \frac{i}{2}\right)^N W(\mu|\{\lambda\}) |\Psi(\{\lambda\})\rangle + \sum_{k=1}^l \left(\lambda_k - \frac{i}{2}\right)^N W_k(\mu|\{\lambda\}) B(\mu) \prod_{j \neq k}^l B(\lambda_j) |\Omega\rangle. \quad (31)$$

Имея (29) и (31), мы можем вычислить спектр трансфер-матрицы,

$$(A(\mu) + D(\mu)) |\Psi(\{\lambda\})\rangle = \Lambda(\mu|\{\lambda\}) |\Psi(\{\lambda\})\rangle, \quad |\Psi(\{\lambda\})\rangle = \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) |\Omega\rangle. \quad (32)$$

Ясно, что такой $|\Psi(\{\lambda\})\rangle$ будет собственным вектором, если набор $\{\lambda\}$ удовлетворяет соотношениям:

$$\prod_{j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j - i}{\lambda_k - \lambda_j} \left(\lambda_j + \frac{i}{2}\right)^N = \prod_{j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j} \left(\lambda_j - \frac{i}{2}\right)^N, \quad \forall k = 1, \dots, l, \quad (33)$$

Таким образом получаем собственные числа трансфер-матрицы:

$$\Lambda(\mu|\{\lambda\}) = \left(\mu + \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\mu - \lambda_j - i}{\mu - \lambda_j} + \left(\mu - \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\mu - \lambda_j + i}{\mu - \lambda_j}. \quad (34)$$

Более того, соотношения (33) преобразуются в

$$\left(\frac{\lambda_k + i/2}{\lambda_k - i/2}\right)^N = \prod_{j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j - i}, \quad \forall k = 1 \dots l. \quad (35)$$

Они называются уравнениями Бёте.

Заметим, что при их выводе подразумевалось, что все λ различны. Если некоторые из них совпадают, то из (33) вовсе не следует (35). В случае когда λ совпадают мы имеем особенности в выражении для спектра. Если попытаться их сократить, новая система ограничений получится переопределённой, поэтому нам подходят только наборы вида $\{\lambda : \lambda_j \neq \lambda_k\}$. Однако, без доказательства отметим, что это все решения.

3.3 Интегралы движения

Далее вычислим необходимые нам наблюдаемые величины. Нетрудно убедиться, что оператор монодромии $T_N(\lambda)$ представляет собой многочлен от λ ,

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}} L_n(\lambda) = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}} \left(\lambda I \otimes I^N + i \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^\alpha \otimes S_n^\alpha \right) = \lambda^N I \otimes I^N + i \lambda^{N-1} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^\alpha \otimes S^\alpha + \dots \quad (36)$$

Если взять след в дополнительном пространстве, то

$$F(\lambda) = \text{Tr} (T_N(\lambda)) = 2\lambda^N + \sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l Q_l. \quad (37)$$

Так как $[F(\lambda), F(\mu)] = 0$, то и Q_l тоже коммутируют, а значит в следе трансфер-матрицы присутствует $N - 1$ взаимно-коммутирующих операторов. Они и будут наблюдаемыми. Как уже было сказано, трансфер-матрица является производящей функцией интегралов движения. Найдём некоторые из них.

Энергия

Найдём собственные значения энергии. Далее будет видно, что они аддитивны. Рассмотрим оператор Гамильтониана (9), который с использованием оператора перестановки будет иметь вид

$$H = \frac{J}{2} \sum_{n=1}^N P_{n,n+1} - \frac{JN}{2}. \quad (38)$$

Разложим $T_N(\lambda)$ в ряд по λ в окрестности $\lambda = i/2$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} T_N(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} &= \left. \frac{d}{d\lambda} \prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}} \left(\left(\lambda - \frac{i}{2} \right) I \otimes I^N + i P_{n,a} \right) \right|_{\lambda=i/2} = \\ &= i^{N-1} \sum_{n=1}^N P_{N,a} P_{N-1,a} \cdots \tilde{P}_{n,a} \cdots P_{2,a} P_{1,a}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь $\tilde{P}_{n,a}$ обозначена отсутствующая перестановка. Композицию перестановок преобразуем следующим образом,

$$P_{N,a} P_{N-1,a} \cdots \tilde{P}_{n,a} \cdots P_{2,a} P_{1,a} = P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-1,n+1} \cdots P_{N-1,N} P_{N,a}. \quad (40)$$

С учётом этого преобразования возьмём след от от (39):

$$\left. \frac{d}{d\lambda} F_N(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = i^{N-1} \sum_{n=1}^N P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-1,n+1} \cdots P_{N-1,N}. \quad (41)$$

Рассмотрим оператор

$$F_N(i/2) = \text{Tr} T_N(\lambda) = i^N P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{N-1,N}. \quad (42)$$

Если домножить справа на $F_N^{-1}(i/2)$, то сократится большая часть перестановок:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{d\lambda} F_N(\lambda) \Big|_{\lambda=i/2} \right) \cdot F_N^{-1}(\lambda) \Big|_{\lambda=i/2} = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N P_{1,2} \cdots P_{n-2,n-1} \cancel{P_{n-1,n+1} P_{n+1,n+2} \cdots P_{N-1,N}} \times \\
& \quad \times \left[\cancel{P_{N,N-1} \cdots P_{n+2,n+1}} P_{n+1,n} P_{n,n-1} P_{n-1,n-2} \cdots P_{2,1} \right] = \\
& = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N P_{1,2} \cdots P_{n-2,n-1} \cancel{P_{n-1,n+1} P_{n+1,n+1}} P_{n+1,n} P_{n-1,n-2} \cdots P_{2,1} = \\
& = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \cancel{P_{1,2} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n-2} \cdots P_{2,1}} P_{n,n+1} = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N P_{n,n+1}.
\end{aligned}$$

Слева собирается производная логарифма,

$$\frac{d}{d\lambda} \ln(F_N(\lambda)) \Big|_{\lambda=i/2} = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N P_{n,n+1}, \quad (43)$$

а следовательно гамильтониан примет вид

$$H = \frac{iJ}{2} \frac{d}{d\lambda} \ln(F_N(\lambda)) \Big|_{\lambda=i/2} - \frac{JN}{2}. \quad (44)$$

С помощью (34) определим спектр гамильтониана. Логарифмируем (32), и дифференцируем по μ в точке $\mu = i/2$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\mu} \ln(F_N(\mu)) \Big|_{\mu=i/2} |\Psi\{\lambda\}\rangle = \left(\Lambda_N^{-1} \left(\frac{i}{2} \Big| \{\lambda\} \right) \frac{d}{d\mu} \Lambda(\mu|\{\lambda\}) \Big|_{\mu=i/2} \right) |\Psi\{\lambda\}\rangle = \\
& = \left[i^{N-1} \left(\prod_{j=1}^l N \left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2} \right) - \left(\sum_{k=1}^l \frac{1}{(\lambda_k - i/2)^2} \prod_{j \neq k} \left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2} \right) \right) \right) \right] \times \\
& \times \left[i^{-N} \prod_{j=1}^l N \left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2} \right)^{-1} \right] |\Psi\{\lambda\}\rangle = \frac{1}{i} \left(N - \sum_{k=1}^l \frac{1}{(\lambda_k^2 + 1/4)} \right) |\Psi\{\lambda\}\rangle = \blacksquare |\Psi\{\lambda\}\rangle,
\end{aligned}$$

где были введены обозначения для оператора

$$\blacksquare = \frac{1}{i} \left(N - \sum_{k=1}^l \frac{1}{(\lambda_k^2 + 1/4)} \right). \quad (45)$$

Таким образом, гамильтониан имеет спектр вида

$$H |\Psi\{\lambda\}\rangle = \left(\frac{iJ}{2} \blacksquare - \frac{JN}{2} \right) |\Psi\{\lambda\}\rangle = \left(-\frac{J}{2} \sum_{k=1}^l \frac{1}{(\lambda_k^2 + 1/4)} \right) |\Psi\{\lambda\}\rangle. \quad (46)$$

Видно что $H|\Omega\rangle = 0$ и при $J > 0$ все собственные числа отрицательны. Именно потому $|\Omega\rangle$ нельзя назвать настоящим вакуумом в антиферромагнитном случае. Удобно ввести для них обозначения:

$$H|\Psi\{\lambda\}\rangle = \sum_{j=1}^l \varepsilon(\lambda_j) |\Psi\{\lambda\}\rangle, \quad \varepsilon(\lambda_j) = -\frac{J}{2} \frac{1}{(\lambda_j^2 + 1/4)}. \quad (47)$$

Таким образом мы нашли энергетический спектр и показали, что собственные значения аддитивны.

Спин

Семейство из $N - 1$ коммутирующих операторов дополняется третьей компонентой спина S^3 . Заметим, что наличие N взаимно-коммутирующих операторов доказывает интегрируемость классического предела задачи. Определим полный спин:

$$S^\alpha = \sum_{n=1}^N S_n^\alpha, \quad \alpha = 1 \dots 3. \quad (48)$$

Компоненты $S^{1,2}$ обозначим:

$$\begin{aligned} S^+ &= S^1 + iS^2 \\ S^- &= S^1 - iS^2 \end{aligned} \quad (49)$$

Покажем, что все они коммутируют со следом трансфер-матрицы. Сначала вычислим коммутатор полного спина с оператором Лакса:

$$\begin{aligned} [L_n(\lambda), S^\alpha] &= \left[\lambda I \otimes I^N + i \sum_{\beta=1}^3 \sigma^\beta \otimes S_n^\beta, S^\alpha \right]_{\mathcal{H}} = i \left[\sum_{\beta=1}^3 \sigma^\beta \otimes S_n^\beta, \sum_{n=1}^N S_n^\alpha \right]_{\mathcal{H}} = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{\alpha=1}^3 [\sigma^\beta \otimes \sigma_n^\beta, \sigma_n^\alpha]_{\mathcal{H}} = \frac{i}{4} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^\beta \otimes [\sigma_n^\beta, \sigma_n^\alpha]_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha, \gamma=1}^3 \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \sigma^\beta \otimes \sigma_n^\gamma = \\ &= -\frac{i}{4} \sum_{\alpha, \gamma=1}^3 [\sigma^\gamma, \sigma^\alpha]_{aux} \otimes \sigma_n^\gamma = -\frac{i}{4} \sum_{\gamma=1}^3 [\sigma^\gamma, \sigma^\alpha]_{aux} \otimes \sigma_n^\gamma = -\frac{1}{2} [L_n(\lambda), \sigma^\alpha]_{aux}. \end{aligned} \quad (50)$$

Теперь перейдём к коммутатору с оператором монодромии. Так как коммутатор имеет свойство дифференцирования, получаем

$$\begin{aligned} [T_N(\lambda), S^\alpha]_{\mathcal{H}} &= \sum_{n=1}^N L_N(\lambda) \dots [L_n(\lambda), S^\alpha]_{\mathcal{H}} \dots L_1(\lambda) \underbrace{=}_{(50)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N L_N(\lambda) \dots [L_n(\lambda), \sigma^\alpha]_{aux} \dots L_1(\lambda) = -\frac{1}{2} [T_N(\lambda), \sigma^\alpha]_{aux}. \end{aligned} \quad (51)$$

Из получившегося видно, что оператор монодромии инвариантен относительно преобразований алгебры sl_2 . Изучим это свойство подробнее. Рассмотрим коммутатор справа и запишем его в виде матриц в дополнительном

пространстве:

$$\begin{pmatrix} [A, S^\alpha] & [B, S^\alpha] \\ [C, S^\alpha] & [D, S^\alpha] \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \sigma^\alpha \right]. \quad (52)$$

Возьмём след, после чего получим, что все три компоненты спина коммутируют с набором $N - 1$ взаимно-коммутирующих операторов в следе трансфер-матрицы

$$[F(\lambda), S^\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 3. \quad (53)$$

Значит, мы имеем набор из N одновременно измеримых наблюдаемых. Вычислим коммутаторы двух компонент спина с $B(\lambda)$:

$$[B, S^3] = -B \quad (54)$$

$$[B, S^+] = A - D. \quad (55)$$

Заметим, что псевдовакуум $|\Omega\rangle$ по построению является собственным для S^+ и S^3 .

$$\begin{cases} S^+ |\Omega\rangle = 0 \\ S^3 |\Omega\rangle = \frac{N}{2} |\Omega\rangle \end{cases} \quad (56)$$

Следовательно, псевдовакуум является состоянием старшего веса. Спектр S^3 имеет вид

$$S^3 |\Psi\{\lambda\}\rangle = \left(\frac{N}{2} - l \right) |\Psi\{\lambda\}\rangle. \quad (57)$$

Это означает, что у вектора Бёте с некоторым l значение $S^3 = N/2 - l$. Спектр S^+ обнуляется, таким образом все $|\Psi\{\lambda\}\rangle$ будут векторами старшего веса.

$$\begin{aligned} S^+ |\Psi\{\lambda\}\rangle &= S^+ \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) |\Omega\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{(A(\lambda_j) - D(\lambda_j))}{N_j\{\lambda\}} B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_{j-1}) \tilde{B}(\lambda_j) B(\lambda_{j+1}) \cdots B(\lambda_l) |\Omega\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^l N_j\{\lambda\} B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_{j-1}) \tilde{B}(\lambda_j) B(\lambda_{j+1}) \cdots B(\lambda_l) |\Omega\rangle = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь с помощью \tilde{B} обозначено место, где отсутствует такой оператор. Без доказательства отметим, что все $N_j\{\lambda\} \equiv 0$ при условии выполнения уравнений Бете (35).

Далее введём оператор квадрата спина \mathbf{S}^2 ,

$$\mathbf{S}^2 := \sum_{\alpha=1}^3 (S^\alpha)^2 = S^- S^+ + S^3 (S^3 + 1). \quad (59)$$

Его спектр будет иметь вид

$$\mathbf{S}^2 |\Psi\{\lambda\}\rangle = L(L+1) |\Psi\{\lambda\}\rangle, \quad L := \frac{N}{2} - l > 0. \quad (60)$$

А значит

$$l \leq \frac{N}{2}. \quad (61)$$

Полученное выше условие говорит нам о том, что вектор Бете не исчезнет под действием данного оператора. Таким образом мы нашли спектр операторов квадрата спина и третьей компоненты спина.

Изложенный в этой главе подход к решению модели спиновой цепочки не всегда эффективен. Он нетривиален в плане введения дополнительных конструкций и обслуживает лишь модель $XXZ_{\frac{1}{2}}$. Решение других моделей, например $XXZ_{\frac{1}{2}}$, требует введения ещё более сложных конструкций, таких, как квантовые группы. Более того, нас интересует кратность вырождения состояний системы, отвечающих одному и тому же собственному значению. Без доказательства отметим, что в случае $XXZ_{\frac{1}{2}}$ это значение равно

$$Z(\lambda, N) = \binom{N}{l} - \binom{N}{l-1}. \quad (62)$$

Для вывода этой формулы необходимо провести некоторый нетривиальный анализ.

Резюмируя, стоит сказать, что с алгебраической точки зрения решение задачи на собственные функции эквивалентно разложению тензорного произведения представлений алгебры sl_2 на неприводимые. Старшим весам каждой неприводимой компоненты будет соответствовать решение уравнений Бёте. Здесь нам на помощь приходит аппарат кристаллических базисов. Как уже было отмечено выше, он имеет очень хорошее поведение при многократном тензорном произведении представлений, а также позволяет получить не только собственные функции, но и спектр. Это всё осуществимо следуя определённому алгоритму, при этом не привлекая новых аналитических конструкций всякий раз. Более того, мы имеем возможность обслужить различные алгебры симметрий, а не только sl_2 . Также этот аппарат помогает нам найти базис, в котором тензорное произведение представлений разлагается на неприводимые компоненты.

То обстоятельство, что мы имеем возможность рассматривать различные алгебры Ли играет довольно важную роль в свете рассмотрения *AdS/CFT* соответствия, о чём будет рассказано далее.

4 Интегрируемость в соответствии $\mathcal{N} = 4$ SYM и теории струн в $AdS_5 \times S^5$

4.1 Необходимые понятия

Открытие соответствия между струнной теорией некоторого типа в пространстве анти-де Ситтера и конформной теорией поля на его границе является одним из самых интересных достижений теоретической физики за последние 20 лет. Оно позволяет находить спектр теорий поля с сильной связью используя аппарат общей теории относительности и гравитации. В отличие от теорий со слабой связью, где константа взаимодействия $g \ll 1$, мы не имеем возможности использовать теорию возмущений и строить разложение по параметру g . Однако AdS/CFT соответствие предлагает эффективный непerturbативный метод исследования таких теорий.

Конформная теория поля

Рассмотрим теории, инвариантные относительно дилатаций (скейлинга). Самым простым примером такой теории будет являться теория ϕ^4 :

$$S[\phi] = \int d^4x \left((\partial\phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right).$$

Нетрудно видеть, что она инвариантна относительно преобразований вида

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \lambda x_\mu, \quad \phi(x) \rightarrow \lambda^{-\Delta} \phi(\lambda x), \quad (1)$$

где Δ — скейлинговая размерность поля ϕ . В нашей теории $\Delta = 1$. Если добавить в лагранжиан член с массой, то она не будет инвариантной относительно дилатаций. Без доказательства отметим, что для скейлинговой инвариантности теории необходимо удовлетворить условию бесследовости тензора энергии-импульса. Стоит заметить, что при квантовании такой теории эта симметрия будет нарушена и возникнут так называемые аномальные размерности, о которых чуть ниже будет рассказано подробно.

Рассмотрим более общий класс преобразований, называемый общей конформной группой. Эта группа включает в себя трансляции, преобразования Лоренца, дилатации, а также специальные конформные преобразования, которые имеют вид

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \frac{x_\mu + c_\mu x^2}{1 + 2cx + c^2 x^2}.$$

Без доказательства отметим, что общая конформная группа изоморфна группе Ли $SO(2, d)$, где d — размерность пространства, $d \neq 2$. Напишем генераторы соответствующих преобразований:

$$\begin{array}{lll} \delta x_\mu = & a_\mu & P_\mu = -i\partial_\mu \\ & \omega_{\mu\nu} x_\nu & J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \\ & \lambda x_\mu & D = -ix_\mu \partial^\mu \\ & (b_\mu x^2 - 2x_\mu(bx)) & K_\mu = i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x_\nu \partial^\nu). \end{array}$$

Число генераторов в случае $d \neq 2$ равно $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Коммутационные соотношения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [D, K_\mu] &= -K_\mu, \\ [D, P_\mu] &= P_\mu, \\ [K_\mu, K_\nu] &= 0, \\ [K_\mu, P_\nu] &= \eta_{\mu\nu} D - iJ_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

В случае $d = 2$ общая конформная группа бесконечномерна. Как следствие, она будет иметь бесконечное число генераторов, бесконечное число сохраняющихся токов, поэтому иногда двухмерную конформную теорию называют точно решаемой. Также стоит заметить, что примеры теорий, инвариантных относительно дилатаций, но не общей конформной группы, встречаются крайне редко, поэтому далее полагаем, что рассматриваемые теории будут инвариантны относительно общей конформной группы преобразований.

Перейдём к рассмотрению этих преобразований с точки зрения квантовой теории поля. Как правило, для того, чтобы как-то справляться с расходимостью интегралов при подсчёте корреляционных функций, в теорию вводят регуляризацию. Частным примером такой процедуры является размерная регуляризация, где вычисления всех интегралов проводятся в произвольной размерности d , а затем, в конце вычислений, параметр d устремляется к нужной нам размерности пространства-времени d' . В процессе применения регуляризации вводят так называемый массовый параметр μ для обезразмеривания константы взаимодействия $g_0 = g\mu^{d'-d}$. Этот параметр отражает свободу выбора размерной регуляризации, с его помощью мы имеем возможность регулировать константу связи (бегущая константа связи) и приводить конечную часть корреляционных функций к любому нужному нам значению. Перенормированная и перенормированная функции Грина связаны как

$$G^{(n)}(p_i, g_0, m_0; \epsilon) = Z_\phi^{-\frac{n}{2}} G_r^{(n)}(p_i, g, m, \mu; \epsilon),$$

где m_0, g_0 — голые параметры, а перенормированная функция Грина зависит от перенормированных параметров m и g , $\epsilon = d' - d$, μ — массовый параметр, Z_ϕ — нормировка волновой функции. Так как функция Грина до перенормировки не должна зависеть от массового параметра, мы можем масштабировать его

$$\mu \rightarrow e^s \mu, \quad s \in \mathbb{R},$$

таким образом придя к идее о ренормгруппе. Продифференцировав функцию Грина по массовому параметру, мы должны получить ноль, что приводит нас к уравнению ренормгруппы

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} - \mu \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu} \right] G_r^{(n)}(p_i, g, m, \mu; \epsilon) = 0,$$

или же

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g, \frac{m}{\mu}, \epsilon) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g, \frac{m}{\mu}, \epsilon) \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} \gamma_\phi(g, \frac{m}{\mu}, \epsilon) \right] G_r^{(n)}(p_i, g, m, \mu; \epsilon) = 0,$$

что, с учётом проведения одновременного преобразования $p_i \rightarrow tp_i$ и $m \rightarrow tm$ и

$$G_r^{(n)}(tp_i, g, tm, t\mu; \epsilon) = t^\Delta G_r^{(n)}(p_i, g, m, \mu; \epsilon),$$

где $\Delta = d + n(1 - \frac{d}{2}) = d' - n + \epsilon(\frac{n}{2} - 1)$ — скейлинговая размерность, может быть приведено к виду

$$\left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial \beta} + (\gamma_m(g) - 1) m \frac{\partial}{\partial m} + \Delta - \frac{n}{2} \gamma_\phi(g) \right] G_r^{(n)}(tp_i, g, m, \mu; \epsilon) = 0.$$

После проведения размерной регуляризации, мы берём предел $\epsilon \rightarrow 0$ и имеем $\Delta = d' - n$. Это уравнение описывает изменения функции Грина $G_r^{(n)}$ в зависимости от масштабирования импульса на множитель t . Отметим, что если бы $\beta = \gamma_m = \gamma_\phi = 0$, то результирующим эффектом было бы значение скейлинговой размерности Δ как в классическом случае. Однако, в случае нетривиальных вышеупомянутых функций скейлинговая симметрия (а значит и конформная) нарушается, тензор энергии импульса перестаёт быть бесследовым

$$T_\mu^\mu \sim \beta(g) F_{\mu\nu}^2,$$

а размерность Δ будет скорректирована γ_ϕ , также называемой аномальной размерностью

$$\Delta = d' - n + \gamma_\phi = d' - n + \mu \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu}.$$

Однако, у бета-функции существуют неподвижные точки, где она обнуляется. Эти точки называют точками инфракрасной и ультрафиолетовой расходимости. В них теория конформно инвариантна.

Как правило, частицам теории сопоставляются значения их массы и лоренцевы квантовые числа, соответствующие инвариантам Казимира группы Пуанкаре. В присутствии конформной инвариантности оператор массы $P_\mu P^\mu$ больше не коммутирует с другими генераторами (например, с D). Более того, энергия и масса могут быть перенормированны, а значит, если какое-то представление конформной группы содержит состояние с той или иной энергией, то оно будет содержать и все состояния, получаемые из него с помощью дилатаций. Следовательно, чтобы избежать проблемы с идентификацией частиц и их состояний, необходимо вместо массы избрать другую величину, а именно, скейлинговую размерность оператора поля. Квантовая версия закона преобразования (1) будет иметь вид

$$[D, \phi(x)] = i(\Delta + x_\mu \partial^\mu) \phi(x).$$

Более того, договоримся рассматривать только операторы тех полей, что имеют хорошее поведение при конформных преобразованиях, так называемые примарные операторы $\mathcal{O}(x)$. Эти операторы под действием понижающего оператора K_μ при $x = 0$ должны обнуляться, а остальные операторы, так называемые потомки, будут получаться из примарных под действием повышающего оператора P_μ . Таким образом, спектром некоторой конформной теории поля можно считать совокупность примарных операторов и соответствующих им скейлинговых размерностей $(\mathcal{O}_i, \Delta_i)$.

Инвариантность относительно конформных преобразований накладывает некоторые ограничения на теорию. Во-первых, зависимость двух- и трёх-точечных корреляционных функций от координат имеет фиксированный

вид

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(y) \rangle = \frac{A \delta_{ij}}{|x - y|^{2\Delta_i}},$$

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i) \mathcal{O}_j(x_j) \mathcal{O}_k(x_k) \rangle = \frac{\lambda_{ijk}}{|x_i - x_j|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} |x_j - x_k|^{\Delta_j + \Delta_k - \Delta_i} |x_k - x_i|^{\Delta_k + \Delta_i - \Delta_j}}.$$

Во-вторых, лоренцевы квантовые числа дают ограничения на возможные скейлинговые размерности примарных операторов, так как все состояния должны иметь положительную норму.

1. для четырёхмерного скалярного поля необходимо $\Delta > 1$, а если $\Delta = 1$, то поле должно удовлетворять уравнению Клейна-Гордона-Фока;
2. для векторного поля \mathcal{O}_μ необходимо $\Delta > 3$, а если $\Delta = 3$, то необходимо выполнение условия $\partial^\mu \mathcal{O}_\mu = 0$;
3. для симметричного оператора поля $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ необходимо $\Delta > 4$, а если $\Delta = 4$, то необходимо выполнение условия $\partial^\mu \mathcal{O}_{\mu\nu} = 0$.

Пространство анти-де Ситтера

Определим понятие пространства Анти-де Ситтера AdS_{d+1} . Оно является максимально симметричным решением уравнений Эйнштейна в размерности $d + 1$ с отрицательной космологической постоянной. Из

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int dx^{d+1} \sqrt{|g|} (\mathcal{R} - \Lambda),$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \mathcal{R} = -\frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu}$$

мы имеем след тензора Риччи $\mathcal{R} = \frac{d+1}{d-1} \Lambda$ и пропорциональность самого тензора Риччи метрике

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{d-1} g_{\mu\nu}.$$

Далее, если потребовать

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\tau\rho} = \frac{\Lambda}{d(d-1)} (g_{\mu\tau} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\tau}),$$

то мы будем иметь решение с максимальным числом симметрий. В данном случае многообразие будет иметь максимально возможное число векторов Киллинга $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Векторами Киллинга называются векторные поля на многообразии, удовлетворяющие уравнению

$$\nabla_X \psi = \lambda X \psi. \quad (2)$$

Теперь получим вид такого решения. Рассмотрим самый общий вид метрики, инвариантной относительно преобразований группы Лоренца и параллельных переносов в $d + 1$ -мерном пространстве

$$ds^2 = \Omega^2(z)(dx^2 + dz^2),$$

где $x = (t, x^1, \dots, x^{d-1})$, а z представляет из себя шкалу длин. Если теория инвариантна относительно преобразований вида 1, то это накладывает ограничение на вид функции $\Omega(z)$. Она должна иметь аналогичный закон преобразования, а скейлинговая размерность будет равна $\Delta = 1$. Тогда функция имеет вид

$$\Omega(z) = \frac{L}{z},$$

где L — константа. Из определения метрики мы можем найти

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = -\frac{d}{L^2} g_{\mu\nu},$$

а также

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{L^2},$$

$$\mathcal{R} = -\frac{d(d+1)}{L^2}.$$

Стоит отметить, что конформная граница пространства эквивалентна пространству Минковского

$$\partial(AdS_{d+1}) = \mathbb{R}^{1,d-1}.$$

Она расположена в пересечении с плоскостью $z = 0$, а там метрика имеет сингулярность, а значит для определения величин на границе необходимо будет ввести регуляризацию.

Последним замечанием стоит сказать, что несмотря на то, что космологическая константа теории отрицательна, а реальная вселенная имеет малую, но положительную космологическую константу, на малых расстояниях свойства гравитации не должны от неё зависеть.

Соответствие теорий

Далее дадим некоторые общие сведения о том, что из себя представляет *AdS/CFT* соответствие. Пускай есть некоторая теория струн в пространстве анти-де Ситтера, а также конформная теория поля на его границе. Рассмотрим так называемый принцип голографии и его связь с энтропией. В физике гравитации система, занимающая макроскопическую область пространства, называется голографической, если все ее физическое содержание может быть представлено некоторой теорией, определенной на границе этой области. Более того, требуется, чтобы граничная теория не содержала более одной степени свободы (конечное число состояний) на элемент планковской площади. Как известно, энтропия черной дыры пропорциональна площади горизонта, а не объему области под горизонтом. Формула для её вычисления воспроизводится исходя из предположения о том, что горизонт обладает одной степенью свободы на элемент планковской площади горизонта. Соответствие *AdS/CFT* является более конкретной реализацией голографического принципа. Пространство, где живёт теория поля может рассматриваться как граница AdS_{d+1} , а калибровочная теория, в которой содержится вся физика внутренности пространства-времени обеспечивает голографическое описание мира с гравитацией. Более конкретная формулировка будет даваться через равенство производящих функций струнной теории и конформной теории поля на границе пространства

$$Z_{str}[\phi|_{\partial AdS} = J] = Z_{CFT}[J].$$

Иначе говоря, каждой наблюдаемой величине на границе пространства анти-де Ситтера можно сопоставить наблюдаемую конформной теории поля, и наоборот. Более того, так как энтропия отвечает за число степеней свободы системы, то их число должно совпадать с обеих сторон соответствия. Без доказательства напомним для них выражения

$$N_{dof}^{QFT} = \frac{R^{d-1}}{\epsilon^{d-1}} c_{QFT}, \quad N_{dof}^{AdS} = \frac{1}{4} \frac{R^{d-1}}{\epsilon^{d-1}} \frac{L^{d-1}}{l_P^{d-1}},$$

где c_{QFT} — центральный заряд, например $c_{SU(N)} \sim N^2$, R — параметр инфракрасной регуляризации (радиус ящика, в который мы поместили системы), ϵ — параметр ультрафиолетовой регуляризации (шаг некоторой решётки), L — константа из выражения для элемента длины пространства AdS_{d+1} , l_P — длина Планка. При вычислении была введена регуляризация, о которой было сказано в связи с сингулярностью в $z = 0$ при рассмотрении конформной границы. Таким образом

$$c_{QFT} = \frac{1}{4} \frac{L^{d-1}}{l_P^{d-1}}$$

является необходимым условием для справедливости голографического принципа. Отметим то обстоятельство, что чем больше выражение справа, тем более применимо классическое описание гравитации в пространстве AdS_{d+1} .

Стоит отметить, что существование такого соответствия остается гипотезой. Зачастую, для той или иной теории поля довольно сложно подобрать геометрию, способную удовлетворить всем её симметриям. Однако к настоящему времени построено достаточно много примеров. Суперконформная $\mathcal{N} = 3$ $ABJM$ теория поля соответствует M -теории в $AdS_4 \times S^7$, $(2,0)$ -теория в шести измерениях соответствует M -теории в $AdS_7 \times S^4$. В данной дипломной работе мы сконцентрируемся на рассмотрении соответствия между $\mathcal{N} = 4$ SYM и IIB теорией струн в $AdS_5 \times S^5$. Пространство-время в данном случае будет иметь размерность 10, а конформной границей AdS_5 будет являться пространство-время Минковского, где и будет рассмотрена конформная теория поля $\mathcal{N} = 4$ SYM .

4.2 Соответствие $\mathcal{N} = 4$ SYM и теории струн в $AdS_5 \times S^5$

В данном параграфе мы рассмотрим конкретную реализацию AdS/CFT соответствия, а именно, соответствие между $\mathcal{N} = 4$ SYM и IIB теорией струн в $AdS_5 \times S^5$. Сперва будут изложены основные особенности двух данных теорий, а затем соображения, согласно которым между ними строится соответствие. Структура изложения опирается на [25], [26], [28], [29] и [27].

$\mathcal{N} = 4$ SYM

Прежде чем приступить к описанию теории необходимо пояснить смысл суперсимметрии и её связи с конформностью. Заметим, что имеет место изоморфизм конформной группы $SO(2, 4) \simeq SU(2, 2)$. Итак, мы имеем $\mathcal{N} = 4$, а значит для расширения $SU(2, 2)$ до суперконформной группы $SU(2, 2|\mathcal{N})$ необходимо добавить четыре суперзаряда Q_α^a (оператор, который превращает бозон в фермион и наоборот) и столько же суперконформных зарядов S_a^α , а также генераторы $U(\mathcal{N})$ глобальных симметрий R_b^a , где $a = 1, \dots, 4$ является индексом R -симметрии, $\alpha = 1, 2$ является спинорным индексом. Тогда мы получим группу $SU(2, 2|4)$. Таким образом имеет место изоморфизм $SU(2, 2|4) \simeq SO(2, 4) \times SU(4)$, где $SU(4)$ является так называемой R -симметрией ($U(4)$ перешла в $SU(4)$, так как элемент R_a^a является внешним автоморфизмом и отделяется от группы). Эта группа имеет максимальное число суперсимметрий. Коммутационные соотношения новых генераторов выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} [D, Q_\alpha^a] &= \frac{i}{2} Q_\alpha^a, \\ [D, S_a^\alpha] &= -\frac{i}{2} S_a^\alpha, \\ [K_\mu, Q_\alpha^a] &= -(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{S}^{\dot{\alpha}a}, \\ [P_\mu, S_a^\alpha] &= (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{Q}_{\dot{\alpha}a}, \\ [Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\alpha}b}] &= 2\delta_b^a (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu, \\ [\bar{S}^{\dot{\alpha}a}, S_b^\alpha] &= 2\delta_b^a (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} K_\mu, \\ \{Q_\alpha^a, S_b^\beta\} &= -i\delta_b^a (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha^\beta J_{\mu\nu} - 2i\delta_b^a \delta_\alpha^\beta D - 4\delta_\alpha^\beta R_b^a, \end{aligned}$$

где $(Q_\alpha^a)^\dagger = \bar{Q}_{a\dot{\alpha}}$, $(S_a^\alpha)^\dagger = \bar{S}^{a\dot{\alpha}}$, а σ — генераторы $su(4)$ в фундаментальном представлении. Первые две строки показывают, что Q — это повышающий оператор, а S — понижающий. Следующие две строки говорят нам о том, что генераторы S нужны в том числе для того, чтобы замкнуть алгебру. Оставшиеся соотношения являются стандартными для определения суперсимметрии. Напишем коммутационные соотношения для R -симметрии

$$\begin{aligned} [R_b^a, Q_\alpha^c] &= \delta_b^c Q_\alpha^a - \frac{1}{4} \delta_b^a Q_\alpha^c, \\ [R_b^a, S_c^\alpha] &= -\delta_c^a S_b^\alpha + \frac{1}{4} \delta_b^a S_c^\alpha. \end{aligned}$$

Обсудим состав полей теории. Это четыре Вейлевских фермиона ψ_α^a , преобразующихся по первому фундаментальному представлению 4 алгебры $su(4)$ по индексу a и по спинорному представлению $su(2)$ по индексу

α , четыре сопряженных им $\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}$, преобразующихся по третьему фундаментальному представлению $\bar{4}$ алгебры $su(4)$ по индексу a и по спинорному представлению $su(2)$ по индексу $\dot{\alpha}$, а также шесть скалярных вещественных полей ϕ , преобразующихся по представлению $\mathbf{6}$ алгебры $su(4)$, и один калибровочный векторный бозон \mathcal{A}_μ . Мы будем рассматривать $SU(N)$ калибровочную теорию.

Теперь выпишем лагранжиан теории, который нам потом пригодится. Обозначим набор полей \mathcal{W} . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM}[\mathcal{W}] = & \frac{1}{4} \text{Tr} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{D}^\mu \phi^n \mathcal{D}_\mu \phi_n - \frac{1}{4} g^2 \text{Tr} [\phi^m, \phi^n] [\phi_m, \phi_n] \\ & + \text{Tr} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^a \sigma_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \mathcal{D}^\mu \psi_{\beta a} - \frac{1}{2} i g \text{Tr} \psi_{\alpha a} \sigma_m^{ab} \varepsilon^{\alpha\beta} [\phi^m, \psi_{\beta b}] - \frac{1}{2} i g \text{Tr} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^a \sigma_{ab}^m \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} [\phi_m, \bar{\psi}_{\dot{\beta}}^b], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i g \mathcal{A}_\mu, \quad \mathcal{D}_\mu \mathcal{W} = \partial_\mu \mathcal{W} - i g \mathcal{A}_\mu \mathcal{W} + i g \mathcal{W} \mathcal{A}_\mu, \quad (4)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - i g [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (5)$$

а σ^μ и σ^a – киральные проекции гамма матриц на 4 или 6 измерений, соответственно. Можно проверить, что лагранжиан инвариантен относительно преобразований $su(2, 2|4)$. Одним из главных признаков будет являться равенство нулю бета функции. Для одной петли

$$\beta_1(g_{YM}) = \mu \frac{\partial g_{YM}}{\partial \mu} = -\frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N - \frac{1}{6} \sum_i C_i - \frac{1}{3} \sum_j \tilde{C}_j \right), \quad (6)$$

где C_i – казимиров скалярных полей, \tilde{C}_i – казимиров Вейлевских фермионов. Так как все поля лежат в присоединенном представлении, то все казимиров равны N и

$$\beta_1(g_{YM}) = 0, \quad (7)$$

из чего видна конформность теории. Без доказательства отметим, что бета функция равна нулю во всех петлях.

Как уже было сказано в предыдущем параграфе, в конформной теории поля необходимо рассматривать примарные операторы, которые по определению удовлетворяют тождеству

$$[K_\mu, \mathcal{O}(0)] = 0. \quad (8)$$

Примарный оператор и его потомки образуют неприводимое представление $SU(2, 2|4)$, самому оператору соответствует старший вес данного представления. Каждый из них характеризуется набором чисел $(\Delta, j_R, j_L, p, k, q)$, где j_R, j_L – Лоренцевы квантовые числа, а p, k, q – индексы Дынкина, которые задают представление $su(4)$. Без доказательства отметим, что достаточно рассматривать скалярные операторы ($j_R = j_L = 0$) с $k = q = 0$ и $\Delta = p = J$. Операторы с такими квантовыми числами называются киральными примарными. С помощью них можно построить остальные необходимые нам операторы теории.

Теперь рассмотрим наблюдаемые величины теории. Они, очевидно, должны быть инвариантны относительно калибровочных преобразований. Пусть

χ_i — какое-нибудь ковариантное поле (скалярное поле, Вейлевский фермион или поле $\mathcal{F}_{\mu\nu}$). Оно преобразуется как

$$\chi(x) \rightarrow \chi(x) + [\varepsilon(x), \chi(x)], \quad (9)$$

где $\varepsilon(x)$ является генератором калибровочных преобразований. Мы можем построить другие ковариантные поля

$$\mathcal{D}_\mu \chi(x) = \partial_\mu \chi(x) - [\mathcal{A}_\mu(x), \chi(x)]. \quad (10)$$

Поле, соответствующее калибровочному бозону не ковариантно, но преобразуется как

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x) + [\varepsilon(x), \mathcal{A}_\mu(x)]. \quad (11)$$

Рассмотрим односледовые операторы, имеющие вид

$$\mathcal{O}(x) = \chi_I \text{Tr}(\chi_1(x) \dots \chi_L(x)), \quad (12)$$

где χ_I — полностью симметричный тензор с L индексами. Из преобразований полей ясно, что такие операторы локальны, инвариантны относительно калибровочных преобразований. Если рассматривать планарный предел, где для калибровочной группы $SU(N)$ стремим $N \rightarrow \infty$, то там размерность произведения операторов (12) равна сумме размерностей, а значит вся информация о спектре теории содержится в операторах такого вида. Более того, так как $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$, то достаточно рассматривать только симметричные произведения \mathcal{D}_μ , действующие на χ , так как антисимметричные могут быть заменены на поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Раньше уже было отмечено, что односледовые операторы могут быть построены с помощью односледовых киральных примарных операторов.

Необходимо также отметить, что тому или иному набору квантовых чисел $(\Delta, j_R, j_L, p, k, q)$ соответствует некоторое поле и наоборот. Набор из шести скалярных полей может быть охарактеризован тремя комплексными полями

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2), \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^3 + i\phi^4), \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^5 + i\phi^6), \quad (13)$$

и сопряженными им. Таким полям соответствуют заряды

$$(1, 0, 0, 1, 0, 0), \quad (1, 0, 0, 0, 1, 0), \quad (1, 0, 0, 0, 0, 1), \quad (14)$$

а сопряженным соответствуют те же, но с изменённым знаком R -зарядов. Шестнадцати Вейлевским фермионам ψ_α^a и $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}a}$ соответствуют заряды

$$\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

где число знаков минус для R -зарядов чётно для обычных фермионов и нечётно для сопряженных им. Поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ имеют шесть независимых компонент и распадаются на чётные и нечётные самодуальные части \mathcal{F}_+ и \mathcal{F}_- , соответственно. Их и удобно рассматривать. Соответствующие им заряды

$$(2, 0, m, 0, 0, 0), \quad (2, m, 0, 0, 0, 0), \quad (16)$$

где $m = -1, 0, 1$. Стоит отметить, что рассматриваемые нами киральные примарные операторы имеют замечательное свойство: их размерности защищены от квантовых поправок. Это очень важно при рассмотрении AdS/CFT соответствия. В режиме сильной связи нельзя применять теорию возмущений и вычислять квантовые поправки, а переход в этот режим необходим для рассмотрения классического режима в супергравитации.

В теории $\mathcal{N} = 4$ SYM существуют замкнутые подсекторы. Нас будет интересовать $SU(3)$ подсектор. Он состоит из трёх скалярных полей и является замкнутым только в однопетлевом приближении. В многопетлевом необходимо рассмотреть более широкую группу $SU(2|3)$ так как там будет иметь место смешивание комбинации полей ZWX с двумя фермионами, заряды которых $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Как уже было сказано выше, заряды в планарном пределе аддитивны, посему несложно подсчитать заряд оператора (12).

IIВ теория струн в пространстве $AdS_5 \times S^5$

Говоря неформальным языком, в теории струн частица является не точечным объектом, а одномерной струной, живущей в некотором пространстве. Струны могут образовывать петли, иметь направление. Две различные струны взаимодействуют друг с другом путём объединения друг с другом, после чего опять разъединяясь в два различных объекта. В отличие от точечных объектов, которые могут подойти сколь угодно близко друг к другу, взаимодействие между струнами имеет большую протяженность и, как следствие, многие расходимости обычной квантовой теории поля просто отсутствуют. Более того, у струны есть внутренние степени свободы, которые описывают различные виды её колебаний в объемлющем пространстве-времени. Эти моды являются "частицами" теории. Все струнные теории могут быть получены с помощью компактификаций некоторого малого числа теорий, среди которых пять различных суперструнных теорий в десятимерном пространстве, а также теория в двадцати шести измерениях, которая не является суперсимметричной. В нашей ситуации будут рассматриваться замкнутые струны, которые живут в $AdS_5 \times S^5$.

Итак, нас будет интересовать IIB теория суперструн. Нельзя рассматривать обычную бозонную струну, так как в ней нет фермионов, в спектре что замкнутых, что открытых струн есть тахион, а также критическая размерность пространства равна $D = 26$. В этой теории мы работаем с $D = 10$ измерениями, имеем фермионы, а также избавляемся от тахиона в спектре с помощью GSO -проекции. Выбор струнной теории типа IIB обусловлен киральностью. Вкратце опишем построение этой теории. Напишем действие Полякова и дополним его фермионами до суперсимметричной теории

$$S_P = -\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + i\bar{\Psi}^\mu \gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi^\mu d^2\sigma,$$

где X^μ — функция вложения мирового листа в пространство-время, $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$ и $\bar{\Psi} = i\Psi^\dagger \gamma^0$, α' — так называемый угловой параметр струны. Раскладывая спинор мирового листа на Вейлевские спиноры $\Psi^\mu = (\psi_-^\mu, \psi_+^\mu)$ и варьируя действие, мы получаем условия на исчезновение граничного члена, которое может быть осуществлено четырьмя способами:

$$\psi_+^\mu(\tau, \sigma) = \pm \psi_+^\mu(\tau, \sigma + \pi), \quad (17)$$

$$\psi_{-}^{\mu}(\tau, \sigma) = \pm \psi_{-}^{\mu}(\tau, \sigma + \pi), \quad (18)$$

что приводит к возникновению четырёх различных спектров теории замкнутых струн: $R-R$, $R-NS$, $NS-R$, $NS-NS$, где R – периодические, NS – анти-периодические граничные условия. Квантование теории происходит по аналогии с бозонной струной: пишем уравнения движения с соответствующими граничными условиями, ищем решение в виде разложения по модам, объявляем поля операторами с необходимыми нам коммутационными соотношениями, используя процедуру квантования в координатах светового конуса. Состояний с отрицательной нормой не возникает, так как теория суперконформна. Рассмотрим спектр теории. В $R-R$ мы имеем A_0 , A_2 , A_4^{+} – формы, где A_4^{+} – самодуальная 4-форма. В $R-NS$ мы имеем Ψ_{+}^1 и χ_{-}^1 , и по аналогии в $NS-R$ мы имеем Ψ_{+}^2 и χ_{-}^2 , где Ψ_{+} – правый дилатино, χ_{-} – левый гравитино. В $NS-NS$ мы имеем безмассовые частицы ϕ – скалярная частица дилатон, B_2 – 2-форма, $g_{\mu\nu}$ – гравитон, являющийся симметричным и бесследовым тензором. Видно, что теория киральна, так как два дилатино и два гравитино имеют одинаковую киральность.

Ещё один объект, рассмотрение которого необходимо для формулировки AdS/CFT -соответствия – это Dp -браны. Их описание можно вести с двух независимых перспектив. С точки зрения первой, непертурбативной, где основным объектом являются так называемые солитоны, Dp -браны в некотором смысле являются солитонами теории супергравитации. Они деформируют фоновое пространство и испускают замкнутые струны(гравитоны). С другой стороны, это гиперповерхности в $p+1$ измерениях(p метрических и время), которым принадлежат концы открытых струн. На эти концы наложены граничные условия Дирихле. Браны являются динамическими объектами, мы можем написать для них действие Дирака-Борна-Инфельда и даже рассматривать возмущение бран. Внешние возмущения описываются $9-p$ координатами ϕ^i , которые являются поперечными к $p+1$ -мировому объёму в десятимерном пространстве-времени. Есть ещё внутренние возмущения, из-за которых возникает калибровочная теория, где то или иное поле из спектра струны будет являться связностью в главном расслоении мирового объема браны с группой $U(1)$ (или, иначе говоря, будет являться калибровочным полем). Если взять N параллельных совпадающих друг с другом бран, то мы будем иметь $U(N)$ калибровочную теорию. При рассмотрении AdS/CFT соответствия наиболее важным является самодуальное поле A_4^{+} , с которым можно ассоциировать $D3$ -брану, которая тоже будет самодуальной. Брана дуальная к данной – это брана, которая спарена с полем, дуальным к полю данной браны. В случае $p=3$ внешние возмущения будут описываться шестью координатами ϕ^i . Отметим также, что $D3$ -брана, как солитон, будет иметь группу симметрий $\mathbb{R}^4 \times SO(1,3) \times SO(6)$ (в общем случае, для Dp -браны – это $\mathbb{R}^{p+1} \times SO(1,p) \times SO(9-p)$).

Стоит ещё раз остановиться на геометрии пространства $AdS_5 \times S^5$. Отметим, что группой изометрий AdS_5 является $SO(2,4)$, а у S^5 – $SO(6)$. Более того, у этого пространства в наличии находится 32 векторов Киллинга, что играет очень важную роль при рассмотрении соответствия.

Соответствие $\mathcal{N} = 4$ SYM и IIB теорией струн в $AdS_5 \times S^5$

Рассмотрим соответствие со стороны симметрии. С самого начала стоит отметить, что со стороны теории поля мы имеем максимальное число

суперсимметрий, и со стороны гравитации мы имеем максимально симметричное решение уравнений Эйнштейна. Теория $\mathcal{N} = 4$ SYM инвариантна относительно конформных преобразований, которые реализуются группой $SO(2, 4)$. Данные симметрии должны появляться и со струнной стороны соответствия. Пространство время AdS_5 , которое является частью фонового пространства для замкнутых струн, имеет группу изометрий, которая реализуется той же группой $SO(2, 4)$. Также, в нашей полевой теории существует набор фермионных операторов, соответствующих суперсимметриям, которые преобразуются с помощью R -симметрии $SU(4) \simeq SO(6)$. Со стороны теории струн мы имеем сферу S^5 , группой изометрий которой тоже является $SO(6)$. Более того, в $\mathcal{N} = 4$ SYM имеется набор из шести скалярных полей, каждому из которых соответствует направление вдоль сферы S^5 . Иначе говоря, как и хотелось, скалярные поля теории соответствуют дополнительным координатам со стороны струн, а внутренние преобразования полей соответствуют компактифицированному пространству струнной теории. Помимо этого, фермионным операторам можно сопоставить 32 суперзаряда, которым отвечают 32 вектора Киллинга в пространстве AdS_5 .

Рассмотрим соответствие со стороны струнной теории. Рассмотрим набор из N совпадающих $D3$ -бран, где расположены концы открытых струн и IIB замкнутые струны. Действие теории складывается из трёх членов: действия объемлющего пространства (даётся десятимерной супергравитацией + массивными модами), действия взаимодействия бран с объемлющим пространством, а также действия самой стопки бран, дающегося теорией с калибровочной группой $SU(N)$ (одна степень свободы от $U(N)$ теории отщепляется, так как возмущения, соответствующие диагональным элементам представления группы являются как бы самовызванными, когда брана возмущена как целое). В режиме слабой связи, когда $g^2 N \ll 1$, гравитационными эффектами можно пренебречь, так как десятимерная гравитационная постоянная стремится к нулю, и тогда взаимодействием браны с объемлющим пространством можно пренебречь. Таким образом можно рассматривать $D3$ -браны как будто они находятся в плоском пространстве. Более того, массовые состояния открытых струн на $D3$ -бранах при низких энергиях становятся недоступны. Тогда вся физика бран заключена в поведении безмассовых $SU(N)$ -полей Янга-Миллса. Таким образом, так как каждая брана из стопки нарушает половину суперсимметрий группы Пуанкаре, мы имеем калибровочную теорию $\mathcal{N} = 4$ SYM, описывающую динамику бран. В конечном итоге получаем, что теория описывается $\mathcal{N} = 4$ SYM и теорией замкнутых суперструн типа IIB в 10-мерном пространстве-времени Минковского.

В режиме сильной связи, когда $g^2 N \gg 1$, гравитационные эффекты становятся важны, браны получают заряд Рамон-Рамона и энергию. Тогда N $D3$ -бран описываются нетривиальным решением для безмассовых полей в IIB теории струн практически таким же способом, каким описываются заряженные чёрные дыры. Решение для бран содержит горизонт, расположенный в конце бесконечной горловины чёрной дыры. Геометрия вблизи горизонта может быть получена напрямую из метрики соответствующего гравитационного решения.

Отдельно остановимся на этом моменте и рассмотрим аналогию в малом числе измерений, а именно, в двух пространственных измерениях.

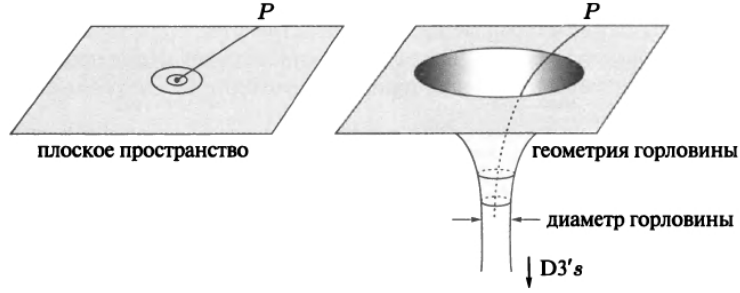


Рис. 8: Иллюстрация аналогии с чёрной дырой в двух пространственных измерениях.

На рисунке 4.2 слева видно, что длина окружности с центром в начале координат стремится к нулю при приближении к началу координат. На рисунке 4.2 справа начало координат сместилось на бесконечное расстояние вниз по горловине и длины окружностей стремятся к постоянному значению. Окружность на бесконечном расстоянии внутри получившегося бесконечного цилиндра называется горизонтом. Радиальное направление в трансверсальном пространстве соответствует линии, начинающейся в точке P и спускающейся внутрь горловины. В случае $D3$ -бран вместо плоскости мы имеем шестимерное пространство, поперечное к самим бранам, а вместо окружностей на горловине — пятимерные сферы. Пространство AdS^5 возникает из четырёх пространственно-временных измерений параллельных бране плюс радиальное направление из трансверсального пространства, а остальные поперечные образуют S^5 . Таким образом, геометрия вблизи горизонта соответствует геометрии $AdS^5 \times S^5$, а геометрия $D3$ -браны отсутствует. Направления перераспределились следующим образом

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3 \ r}^{AdS_5} & & \overbrace{y^1 \ y^2 \ y^3 \ y^4 \ y^5}^{S^5} \\
 \underbrace{x^0 \ x^1 \ x^2}_{D3 \text{ касательные}} & \underbrace{x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9}_{D3 \text{ поперечные}} &
 \end{array}$$

Так как мы рассматриваем $p = 3$, то мы имеем шесть координат ϕ^i для описания внешних возмущений, которым, как уже было сказано, соответствует направление вдоль сферы, а также калибровочные поля $A_{\mu_1 \dots \mu_4}$, принадлежащие мировому объёму вокруг них для описания внутренних возмущений бран. В конечном итоге получаем, что физика описывается *теорией замкнутых струн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$ вблизи горизонта* и *теорией замкнутых суперструн типа IIB в 10-мерном пространстве-времени Минковского вдали от горизонта*.

Соображения выше обуславливают дуальность $\mathcal{N} = 4$ SYM теории замкнутых струн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$. Однако, описанные выше соображения не претендуют на статус доказательства. Теперь мы мо-

жем сопоставлять некоторым наблюдаемым из одной теории наблюдаемые из другой.

После того, как основание конструкции описано, стоит поговорить о том, почему вообще важно её рассматривать. Во-первых, $\mathcal{N} = 4$ *SYM* в малых порядках имеет очень похожее с квантовой хромодинамикой поведение. В ней нет конфайнмента, однако при конечных температурах, теорию разумно использовать для анализа явлений, имеющих место в кварк-глюонной плазме. Более того, квантование действия замкнутой струны в пространстве $AdS^5 \times S^5$ является довольно сложной проблемой, однако благодаря *AdS/CFT*-соответствию её спектр может быть посчитан. Нахождение спектра $\mathcal{N} = 4$ *SYM* тоже является нетривиальной задачей. В следующем параграфе мы перейдём к их нахождению.

4.3 Эквивалентность двухточечного коррелятора примарных операторов $\mathcal{N} = 4$ SYM скалярного сектора и Гамильтониана спиновой цепочки

В данном параграфе мы проследуем изложению [30] и покажем эквивалентность двухточечного коррелятора примарных операторов теории $\mathcal{N} = 4$ SYM оператору Гамильтониана спиновой цепочки. Это необходимо для того, чтобы сосчитать аномальные размерности операторов, составленных из скалярных полей без ковариантных производных в однопетлевом приближении. Вычисления усложняются тем обстоятельством, что поля могут смешиваться, однако мы будем рассматривать замкнутый подсектор, где смешивания нет.

Итак, для того чтобы найти аномальную размерность оператора необходимо рассмотреть двухточечный коррелятор

$$\langle \mathcal{O}(x) \bar{\mathcal{O}}(y) \rangle = \frac{C}{|x - y|^{2\Delta}}, \quad (19)$$

где $\Delta = \Delta_0 + \gamma$. Для скалярных полей, как уже было сказано ранее, $\Delta_0 = 1$, а значит для оператора вида (12) $\Delta_0 = L$. Так как $\gamma \ll \Delta_0$, то можно аппроксимировать коррелятор

$$\langle \mathcal{O}(x) \bar{\mathcal{O}}(y) \rangle \approx \frac{C}{|x - y|^{2\Delta_0}} (1 - \gamma \ln \Lambda^2 |x - y|^2), \quad (20)$$

где Λ – параметр обрезания регуляризации. Главный вклад в коррелятор будем называть древесным. Дадим графическое описание диаграмм, соответствующим таким вкладам

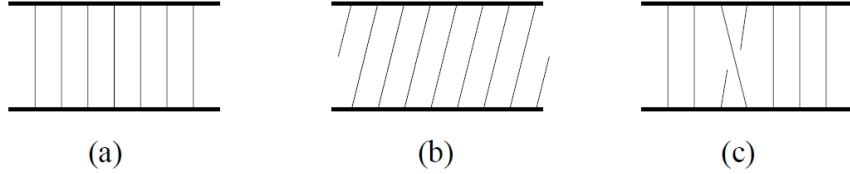


Рис. 9: Взаимодействие полей. Горизонтальные линии – операторы, вертикальные – поля, входящие в операторы. Графы (a) и (b) планарны, а (c) – нет.

Рассмотрим планарный предел $N \rightarrow \infty$ и упрощённый случай, когда операторы в корреляторе являются киральными примарными операторами вида

$$\Psi_L = \frac{(4\pi^2)^{\frac{L}{2}}}{\sqrt{LN}^{\frac{L}{2}}} \text{Tr} Z^L, \quad (21)$$

где множители перед оператором возникли после перенормировки. Всюду предполагается, что $L \ll N$. Древесный вклад подкоррелятора двух полей внутри следа будет иметь вид

$$\langle Z_B^A(x) \bar{Z}_D^C(y) \rangle = \frac{\delta_D^A \delta_B^C}{4\pi^2 |x - y|^2}, \quad (22)$$

и тогда

$$\langle \Psi_L(x) \bar{\Psi}_L(y) \rangle = \frac{LN^L}{(\sqrt{L}N^{\frac{L}{2}})^2 |x-y|^{2L}} = \frac{1}{|x-y|^{2L}}, \quad (23)$$

где основной вклад давали диаграммы вида (а) и (б). Покажем, что в планарном пределе диаграммы вида (с) подавляются. Дело в том, что граф (а) будет давать вклад

$$\dots \delta_{A'}^A \delta_A^{A'} \delta_{B'}^B \delta_B^{B'} \delta_{C'}^C \delta_C^{C'} \dots = \dots N^3 \dots, \quad (24)$$

в то время, как вклад графа (с) будет иметь вид

$$\dots \delta_{A'}^A \delta_A^{B'} \delta_{B'}^C \delta_B^{A'} \delta_C^B \delta_C^{C'} \dots = \dots N \dots \quad (25)$$

и будет подавлен. Рассмотрим теперь случай примарных операторов вида

$$\mathcal{O}_{I_1, \dots, I_L}(x) = \frac{(4\pi^2)^{\frac{L}{2}}}{\sqrt{C_{I_1, \dots, I_L}} N^{\frac{L}{2}}} \text{Tr}(\phi_{I_1}(x) \dots \phi_{I_L}(x)), \quad (26)$$

где C_{I_1, \dots, I_L} – симметричный индекс. Тогда древесный вклад коррелятора равен

$$\langle \mathcal{O}_{I_1, \dots, I_L}(x) \bar{\mathcal{O}}^{J_1, \dots, J_L}(y) \rangle_{tree} = \frac{1}{C_{I_1, \dots, I_L}} \frac{1}{|x-y|^{2L}} (\delta_{I_1}^{J_1} \dots \delta_{I_L}^{J_L} + \text{циклические перестановки индексов } J_i). \quad (27)$$

Рассмотрим теперь однопетлевое приближение. Из лагранжиана (3) нас будет интересовать только бозонный вклад

$$\mathcal{L}_{bosonic} = \frac{1}{4} \text{Tr} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{D}^\mu \phi^n \mathcal{D}_\mu \phi_n - \frac{1}{4} g^2 \text{Tr} [\phi^m, \phi^n] [\phi_m, \phi_n]. \quad (28)$$

Определив киральные примарные операторы теории так, чтобы их аномальная размерность была равна нулю, мы получим, что калибровочные бозоны не внесут вклад в аномальную размерность коррелятора. Тогда необходимо рассмотреть только вклад взаимодействия полей, который может быть записан, как

$$\frac{g^2}{4} \sum_{I, J} (\text{Tr}(\phi_I \phi_I \phi_J \phi_J) - \text{Tr}(\phi_I \phi_J \phi_I \phi_J)). \quad (29)$$

Необходимо поместить это выражение в коррелятор и провести спаривание с двумя соседними полями на левой обкладке и с двумя соседними на правой обкладке таким образом, чтобы результирующий граф был планарным, как на рисунке 10.

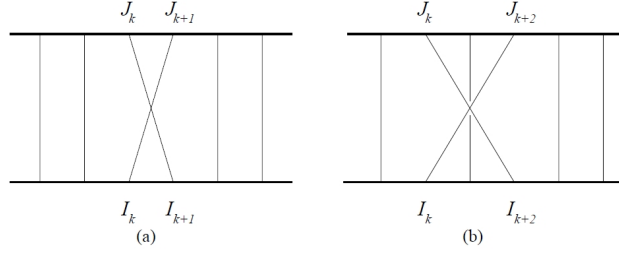


Рис. 10: Выражение для взаимодействия, вставленное в коррелятор для (a) соседний полей, для (b) не соседних. Во втором случае граф не является планарным.

Итак, необходимо рассмотреть подкоррелятор

$$\begin{aligned} \langle (\phi_{I_k} \phi_{I_{k+1}})_C^A(x) \left(\frac{ig^2}{4} \int dz^4 \sum_{I,J} (Tr(\phi_I \phi_I \phi_J \phi_J)(z) - Tr(\phi_I \phi_J \phi_I \phi_J)(z)) \right) (\phi^{J_{k+1}} \phi^{J_k})_{A'}^{C'}(x) \rangle = \\ = \frac{iN^2 g^2}{(4\pi^2)^4} \delta_{A'}^A \delta_C^{C'} (2\delta_{I_k}^{J_k} \delta_{I_{k+1}}^{J_{k+1}} + 2\delta_{I_k I_{k+1}} \delta^{J_k J_{k+1}} - 4\delta_{I_k}^{J_{k+1}} \delta_{I_{k+1}}^{J_k}) \int \frac{d^4 z}{|z-x|^4 |z-y|^4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим подробнее интеграл, вычислим его с помощью ультрафиолетового обрезания и Виковского поворота

$$i \int \frac{d^4 z_E}{|z-x|^4 |z-y|^4} \approx \frac{2i}{|x-y|^4} \int_{\Lambda^{-1}}^{|x-y|} \frac{d\xi d\Omega_3}{\xi} = \frac{2\pi^2 i}{|x-y|^4} \ln(\Lambda^2 |x-y|^2). \quad (31)$$

Стоит без доказательства отметить, что необходимо было бы рассматривать однопетлевые диаграммы обмена глюонами между соседними полями, собственной энергии скалярного поля от испускания и поглощения глюона, а также фермионные петли, но на самом деле они не дают весомого вклада. Теперь, подставив это выражение в наш коррелятор получим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{I_1, \dots, I_L}(x) \bar{\mathcal{O}}^{J_1, \dots, J_L}(y) \rangle_{one-loop} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{\ln(\Lambda^2 |x-y|^2)}{|x-y|^{2L}} \sum_{l=1}^L \left(2P_{l,l+1} - K_{l,l+1} - 1 + C \right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{C_{I_1, \dots, I_L}} \sqrt{C_{J_1, \dots, J_L}}} \frac{1}{|x-y|^{2L}} (\delta_{I_1}^{J_1} \dots \delta_{I_L}^{J_L} + \text{циклические перестановки индексов } J_i), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\lambda = g^2 N$ – константа Т'Хофта, а также

$$P_{l,l+1}(\dots \delta_{I_l}^{J_l} \delta_{I_{l+1}}^{J_{l+1}} \dots) = \dots \delta_{I_l}^{J_{l+1}} \delta_{I_{l+1}}^{J_l} \dots \quad (33)$$

меняет местами индексы у соседних полей, и

$$K_{l,l+1}(\dots \delta_{I_l}^{J_l} \delta_{I_{l+1}}^{J_{l+1}} \dots) = \dots \delta_{I_l I_{l+1}} \delta^{J_l J_{l+1}} \dots \quad (34)$$

спаривает индексы соседних полей. Теперь необходимо сложить древесный вклад (27) и однопетлевой вклад (32) для полного выражения в данном приближении. Обратим внимание на выражение (20) и заметим, что аномальную размерность γ необходимо заменить оператором

$$\Gamma = \frac{\lambda}{16\pi^2} \sum_{l=1}^L (1 - C - 2P_{l,l+1} + K_{l,l+1}). \quad (35)$$

Таким образом все возможные аномальные размерности можно найти диагонализовав оператор Γ . Заметим, что константа $C = -1$, что можно получить, подействовав им на киральный примарный оператор Ψ_L , где $P_{l,l+1}\Psi_L = \Psi_L$ и $K_{l,l+1}\Psi_L = 0$, а также заметив, что его аномальная размерность защищена от квантовых поправок и равна нулю. Таким образом

$$\Gamma = \frac{\lambda}{16\pi^2} \sum_{l=1}^L (2 - 2P_{l,l+1} + K_{l,l+1}). \quad (36)$$

Отметим, что мы имеем возможность рассматривать любой односледовый оператор как оператор, действующий на тензорной степени L гильбертовых пространств. Примем во внимание тот факт, что все поля лежат в некотором замкнутом секторе с определённой алгеброй симметрий. Тогда становится ясно, что нахождение аномальных размерностей такого коррелятора равносильно нахождению спектра гамильтониана (36) с алгеброй симметрий, соответствующей нашему сектору. Как мы знаем из алгебраического анзаца Бёте, данную задачу можно свести к чисто алгебраической задаче разложения тензорного произведения представлений алгебры симметрий на неприводимые, где каждому вектору состояний спиновой цепочки будет соответствовать компонента прямой суммы в разложении на неприводимые. Так как мы имеем развитым аппарат кристаллических базисов, то помимо нахождения векторов состояний конфигурации цепочки имеем возможность найти базис пространства представлений, а затем воспользоваться им чтобы диагонализировать гамильтониан спиновой цепочки и найти весь спектр его собственных значений.

4.4 Спектр энергий замкнутой струны в $AdS_5 \times S^5$

В данном параграфе мы изложим некоторые сведения из *IIB* теории струн для замкнутой бозонной струны, вращающейся в $AdS_5 \times S^5$. Изложение будет вестись в соответствии с работами [31] и [32].

Рассмотрим бозонную часть классического действия замкнутой струны в пространстве-времени $AdS_5 \times S^5$

$$S_{bosonic} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int d\xi^2 (G_{mn}^{(AdS_5)}(x) \partial_a x^m \partial^a x^n + G_{pq}^{(S^5)}(y) \partial_a y^p \partial^a y^q), \quad \lambda = \frac{R^2}{\alpha'}. \quad (37)$$

Соответствующие части метрик запишем в следующей параметризации

$$(ds^2)_{AdS_5} = -ch^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + sh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2), \quad (38)$$

$$(ds^2)_{S^5} = d\gamma^2 + \cos^2 \gamma d\varphi_3^2 + \sin^2 \gamma (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\phi_1^2 + \sin^2 \psi d\phi_2^2). \quad (39)$$

В данном случае t играет роль глобального времени в AdS_5 , а параметры $(\phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ отвечают 2+3 генераторам подалгебр Картана $SO(2, 4) \times SO(6)$, соответствующим преобразованиям изометрий нашего пространства. Таким образом, струна имеет 6 интегралов движения: спины, отвечающие генераторам подалгебры Картана $Q_i = (S_1, S_2, J_1, J_2, J_3)$ и энергия E , которая соответствует трансляциям t . Рассмотрим подробнее метрику сферы. Параметр ψ будет удобно ограничить интервалом $[-\pi, \pi]$. Тогда найдём соответствующие интегралы движения

$$J_1 = \sqrt{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \sin^2 \gamma \cos^2 \psi \partial_0 \phi_1 = \sqrt{\lambda} \mathcal{J}_1, \quad (40)$$

$$J_2 = \sqrt{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \sin^2 \gamma \cos^2 \psi \partial_0 \phi_2 = \sqrt{\lambda} \mathcal{J}_2, \quad (41)$$

$$J_3 = \sqrt{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \cos^2 \gamma \partial_0 \phi_3 = \sqrt{\lambda} \mathcal{J}_3. \quad (42)$$

Эти параметры будут принимать те или иные значения в зависимости от того, какие решения мы ищем и каким спектром дуальной теории поля интересуемся. Для квазиклассического приближения (вычисления в котором представляются наиболее простыми), должны быть выполнены условия

$$J \gg 1, \quad \frac{\lambda}{J^2} \ll 1, \quad Q_i \sim J, \quad (43)$$

где $J = J_1 + J_2 + J_3$. Выпишем также выражение для энергии в квазиклассическом приближении, как функции спинов

$$E(Q_i, \lambda) = S + J \left(1 + \frac{\lambda}{J^2} \epsilon_1(Q_i/J) + \frac{\lambda^2}{J^4} \epsilon_2(Q_i/J) + \dots \right) + O(J^0), \quad (44)$$

где $\epsilon_n(Q_i/J)$ – некоторые функции, значения которых вычисляются в зависимости от рассматриваемой конфигурации J_i , а $O(J^0)$ – квантовые поправки.

4.5 Проверка совпадения спектров в $su(3)$ подсекторе

Целью данного параграфа является изложение метода проверки соответствия между IIB теорией струн в пространстве $AdS_5 \times S^5$ и теорией $\mathcal{N} = 4$ SYM для случая подсектора $su(3)$.

Рассмотрим наш случай со стороны теории $\mathcal{N} = 4$ SYM . Подсектор алгебры Ли $su(3)$ с тремя комплексными полями, принадлежащими её фундаментальному представлению можно сконструировать следующим образом

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2), \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^3 + i\phi^4), \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^5 + i\phi^6). \quad (45)$$

Мы можем заметить, что образ действия оператора $K_{l,l+1}$ будет давать ноль, так как алгебра Ли $su(3)$ представляет из себя бесследовые матрицы, а оператор $K_{l,l+1}$ имеет смысл оператора следа. Тогда гамильтониан примет вид

$$\Gamma = \frac{\lambda}{8\pi^2} \sum_{l=1}^L (1 - P_{l,l+1}). \quad (46)$$

Фиксируем длину спиновой цепочки L , что равносильно фиксации числа компонент в односледовом операторе. В таком случае, соответствие между односледовыми операторами и состояниями спиновой цепочки даётся

$$Tr(X_{I_1} \dots X_{I_L}) \rightarrow |I_1 \dots I_L\rangle \quad (47)$$

где $|I_j\rangle$ соответствует фундаментальному представлению алгебры $su(3)$ в узле j , в котором находится гильбертово пространство \mathbb{C}^3 . отождествим вектор вакуума

$$|0\rangle_L = |e_1 \dots e_1\rangle_L \rightarrow Tr(X_1^L). \quad (48)$$

Тогда каждое состояние спиновой цепочки будет описываться её длиной L и двумя числами Дынкина p, q . На языке односледовых операторов это будет означать L полей в операторе, p возмущений вакуума (а именно, число полей X_2 и X_3 в операторе) и q полей X_3 . Необходимо, чтобы было выполнено $L \geq 2p \geq 4q$. Вместо индексов Дынкина $[p, q]$ алгебры $su(3)$, можно записать это условие через индексы Дынкина алгебры $so(6)$, как $[p - 2q, L - 2p + q, p]$. Обозначим J_i – число полей X_i в операторе, $\alpha = p/L$, $\beta = q/L$. Тогда $L = J_1 + J_2 + J_3$ и $(J_1, J_2, J_3) = (L - p, p - q, q) = ((1 - \alpha)L, (\alpha - \beta)L, \beta L)$ и индексы Дынкина будут иметь вид $[J_2 - J_3, J_1 - J_2, J_2 + J_3]$. Эти обозначения нам понадобятся при сопоставления состояний спиновой цепочки с состояниями струн.

Рассмотрим случай подсектора $su(3)$ со стороны IIB теории струн в пространстве $AdS_5 \times S^5$. Как было изложено в параграфе 4.4, мы имеем некоторую замкнутую струну, состояние которой можно охарактеризовать набором чисел $Q_i = (S_1, S_2, J_1, J_2, J_3)$. Рассмотрим случай, когда струна локализована в центре AdS_5 и вращается с некоторым угловым моментом в S^5 . Другими словами, это будет означать, что струна вложена в AdS_5 тривиально, $\rho = 0$, $\gamma = 0$ и $S_1 = S_2 = 0$. Тогда состояние струны задаётся набором спинов (J_1, J_2, J_3) . Эти условия и являются воплощением того обстоятельства, что мы рассматриваем $su(3)$ подсектор со стороны теории струн. Отсюда можно двигаться в разных направлениях и рассматривать различные решения струнных уравнений движения в квазиклассическом

приближении. Все они могут быть условно разделены на две категории: двухспиновые (когда один из угловых моментов равен нулю), и трёхспиновые. Трёхспиновые решения классифицированы и разобраны в статьях [34], [35]. Двухспиновые решения рассмотрены подробно в [36]. В зависимости от выбранного случая мы имеем различные решения, и, соответственно, разные выражения для энергии (44). Вычисление функций $\epsilon_n(Q_i/J)$ представляет из себя отдельную задачу. Подробнее её решение рассмотрено в [32], [37] и [35].

Далее стоит в очередной раз отметить, что спектр аномальных размерностей двухточечного коррелятора односледовых операторов теории $\mathcal{N} = 4$ SYM пересчитывается в спектр струны. Оказывается [32], что при выполнении условий (43) аномальная размерность оператора имеет аналогичное (44) разложение

$$\Delta(Q_i, \lambda) = S + J \left(1 + \frac{\lambda}{J^2} \delta_1(Q_i/J) + \frac{\lambda^2}{J^4} \delta_2(Q_i/J) + \dots \right) + O(J^0), \quad (49)$$

и в [37] показано, что $\epsilon_n(Q_i/J) = \delta_n(Q_i/J)$. Так как нас интересует однопетлевое приближение, то достаточно сопоставить $\epsilon_1(Q_i/J)$ и $\delta_1(Q_i/J)$.

Пускай мы выбрали интересующую нас струнную конфигурацию, фиксируем L и (J_1, J_2, J_3) . Выбрали соответствующий ему односледовый оператор, а именно, линейную комбинацию операторов со всевозможными перестановками полей внутри следа. Задачу численной проверки соответствия можно свести к выполнению следующих шагов.

Шаг 1: Найти решение уравнений движения струны, найти энергию и, как следствие, $\epsilon_1(Q_i/J)$.

Шаг 2: В соответствии с фиксированным J разложить тензорную степень фундаментального представления алгебры $su(3)$ на неприводимые. Благодаря лемме Шура, базис пространства представления будет давать нам блочно-диагональный вид матрицы аномальных размерностей.

Шаг 3: Далее необходимо рассмотреть наименьшее собственное значение гамильтониана в представлении $[p, q]$.

Шаг 4: Увеличить значение J и повторить шаги 2 и 3. Это необходимо сделать несколько раз. Удобнее всего это делать в нотации, действующей α и β .

Шаг 5: По полученным значениям аномальных размерностей δ_1 сделать фит

$$\delta_1 = a + \frac{b}{J} \quad (50)$$

и экстраполировать его до $J \rightarrow \infty$.

Шаг 6: Сопоставить значения δ_1 и ϵ_1 .

Наиболее проблематичным представляется шаг 2, однако мы имеем возможность воспользоваться аппаратом кристаллических базисов. В следующем параграфе нами будет предложена программная реализация, позволяющая выполнять этот шаг при любых фиксированных тензорных степенях J фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$.

4.6 Программная реализация для кристаллических базисов алгебры Ли $su(3)$

Нами был предложен алгоритм построения кристаллического базиса и кристаллического графа для произвольной тензорной степени N фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$. Также была написана его реализация в MATLAB. Стоит заметить, что её можно написать и на любом другом языке, поддерживающим работу с графами. Данная среда была выбрана по той причине, что визуализация графов с её помощью представлялась наиболее удобной.

Сперва опишем вспомогательные функции:

- **[A] = vctrs(n)**: функция, которая на вход берёт степень n тензорного произведения, а на выход даёт массив **A** всех возможных векторов.

Например, в случае $n = 3$ мы имели набор $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k\}$, где $i, j, k = 1, 2, 3$. В данной ситуации мы получим матрицу со всевозможными строками вида **[i, j, k]**.

- **[Y1,Y2] = isgn(A)**: функция, которая на вход берёт массив всех векторов **A**, а на выход даёт массив с сигнатурой (до вычёркивания пар плюсов и минусов) в соответствии с действием каждого из двух операторов **Y1, Y2**.

Мы заведомо знаем значения функций ϵ_i и φ_i , поэтому построение сигнатуры не составляет большого труда. В более общем случае их необходимо было бы вычислить.

- **[RY1,RY2] = risgn(Y1,Y2)**: функция, которая производит вычёркивание пар плюсов и минусов в **Y1** и **Y2**, выдавая **RY1** и **RY2**.
- **[B,C] = KI(A,RY1,RY2)**: функция, которая берёт на вход **A, RY1, RY2**, а на выход даёт массивы векторов-образов после действия на них операторов Кашивары **B** и **C**. Вектора в массивах находятся во взаимно однозначном соответствии как элементы массива, но не как математические объекты. Часть из них уходит в ядро, становясь строчкой нулей.

Эта функция имеет наибольшее время выполнения. В последующих реализациях возможно допустить генерирование образов операторов Кашивары динамически, а не хранить их в большой матрице, к которой необходимо обращаться всякий раз.

- **[A1,B1,C1] = numb(A,B,C)**: функция, которая заменяет вектора на свои порядковые номера.

Это необходимо для того, чтобы свести задачу к работе с обыкновенным графом, полученным после итераций действия операторами Кашивары. Эта функция тоже выполняется довольно продолжительное время, поэтому динамическое генерирование образов должно позволить сильно оптимизировать действие программы.

Далее следуют функции, которые служат нам для обхода графа и нумерации его рёбер в соответствии с действием того или иного оператора Кашивары:

- **[s,t,weights,visited,queues,queue,t,qweights] = onegraph(v,f,ww,B1,C1,visited,queues,queue,t,qweights)**: функция, которая обходит граф в глубину. На вход берёт **v** - вектор, с которого начинается обход, **f** - вектор, в сторону которого будет осуществляться движение (так как операторов Кашивары у нас несколько), **ww** - вес ребра или же, другими словами, номер оператора Кашивары, которым мы попали из **v** в **f**, **B1**, **C1** - правила действия операторов Кашивары, **queues** и **queue,t** - массивы, откуда будем брать **v** и **f** для следующего обхода, **visited** - посещённые вектора, чтобы исключить их из очереди, **qweights** - веса рёбер, указывающие оператор Кашивары. На выходе **s**, **t** и **weights** хранят в себе сам граф. Заметим, что **visited**, **queues**, **queue,t**, **qweights** пополняются динамически.
- **[s,t,weights,visited] = twograph(v,B1,C1,visited)**: функция, которая обходит граф (а именно, связную компоненту) в ширину.

Внутри неё много раз используется **onegraph** до тех пор, пока очереди не исчерпаются. Переменные все те же, за исключением того, что **v** берётся заведомо старшим весом неприводимой компоненты разложения. Это происходит само собой в виду того, что список векторов сгенерирован в необходимом порядке, а также ввиду вычёркивания посещённых векторов.

- **[s,t,weights] = threegraph(A1,B1,C1)**: функция, объединяющая все компоненты связности в один кристаллический граф.

Далее следуют функции, которые используются для правильной интерпретации полученных данных. Встречается большое множество одинаковых весовых диаграмм. Были реализованы функции, которые выдают старшие веса представлений и кратности их вырождения, часть из которых тоже вспомогательные:

- **[h] = H1(y)**: функция, сопоставляющая вектору **h** собственное значение оператора подалгебры Картана **H1**.
- **[h] = H2(y)**: функция, сопоставляющая вектору **h** собственное значение оператора подалгебры Картана **H2**.
- **[H] = hw(G,s,t,A)**: функция, сопоставляющая всем компонентам связности графа **G**, **s**, **t** и массиву векторов **A** старшие веса **H** соответствующие этим компонентам, а также кратности вырождения, записанные в этот же массив.

Теперь можно приступить к описанию алгоритма:

Шаг 1: Сгенерировать список всех векторов, всех вершин кристаллического графа. Это осуществляется использованием функции **vctrs**.

Шаг 2: Вычислить их образы под действием операторов Кашивары. Это осуществляется использованием функций **isgn**, **risgn**, **KI**, где все они перечислены в правильном порядке.

Шаг 3: В соответствии с образами и прообразами векторов, сопоставить им кристаллический граф. Его построение осуществляется с помощью обхода в глубину, а затем в ширину. Это осуществляется использованием функций **numb**, **onegraph**, **twograph**, **threograph**, где все они перечислены в правильном порядке.

Шаг 4: По графу необходимо указать список всех различных неприводимых представлений, входящих в граф и сопоставить им их старшие веса и кратности их вырождений. Это осуществляется использованием функции **hw**.

Приведём пример выходных данных. Всюду старшие веса записаны индексами Дынкина, а C – кратность вырождения. В вершинах графа для удобства стоят номера векторов, а не они сами. Перевод в сами вектора осуществляется довольно просто. Необходимо перевести номер вектора в троичную систему исчисления, заполнив оставшееся пространство числом нулей так, чтобы число разрядов было равно степени тензорного произведения, и затем прибавить к каждому разряду кроме последнего (так как вектор со всеми нулями является первым в нашей нотации) по единице, но уже в десятичной системе исчисления. Например, вектор 5 при степени $n = 4$ перейдёт в последовательность 0012, а затем в 1122, что даёт нам $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$. Можно этого и не делать, вызвав вектора непосредственно из программы.

Рассмотрим всё ту же тензорную степень $n = 3$.

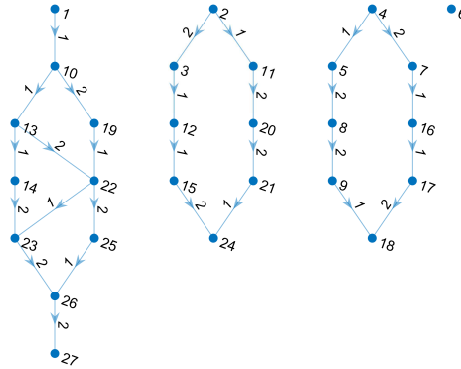


Рис. 11: Тензорная степень $n = 3$ фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$

$$\begin{aligned} N(0,0), C &= 1 \\ N(1,1), C &= 2 \\ N(3,0), C &= 1 \end{aligned}$$

Получили ожидаемый ответ.

Рассмотрим тензорную степень $n = 5$.

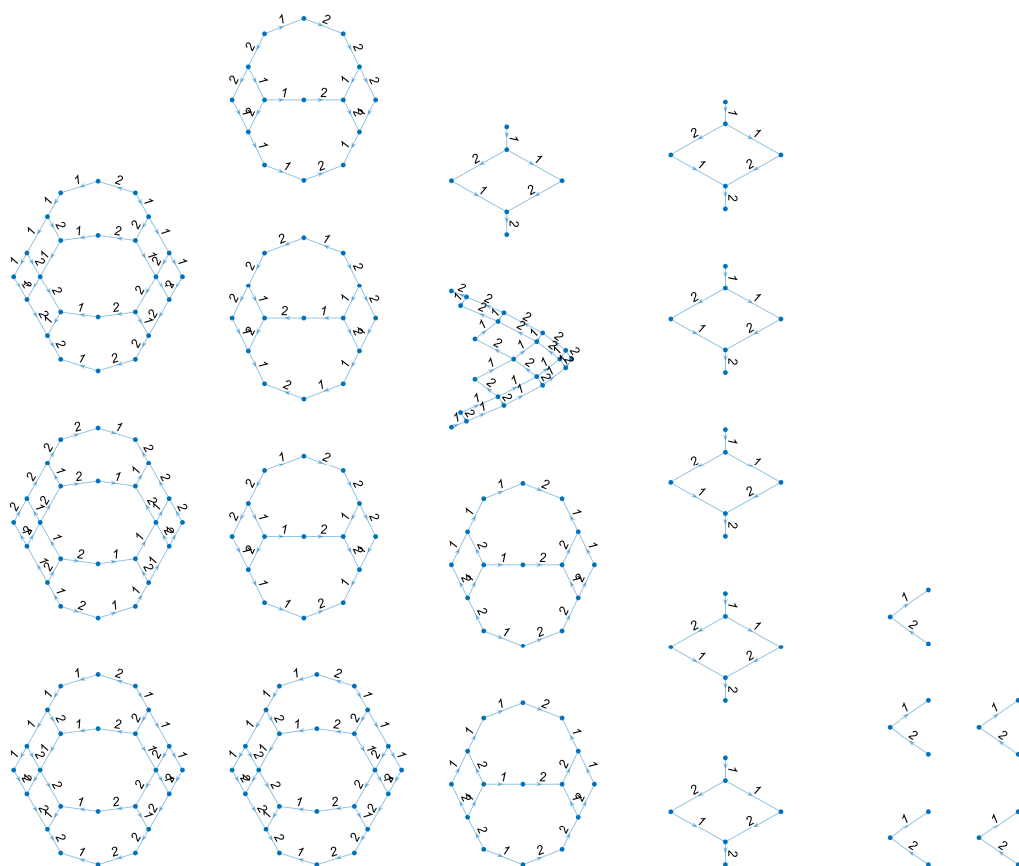


Рис. 12: Тензорная степень $n = 5$ фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$

$N(0,1), C = 5$
 $N(1,2), C = 5$
 $N(2,0), C = 6$
 $N(3,1), C = 4$
 $N(5,0), C = 1$

Рассмотрим тензорную степень $n = 8$.

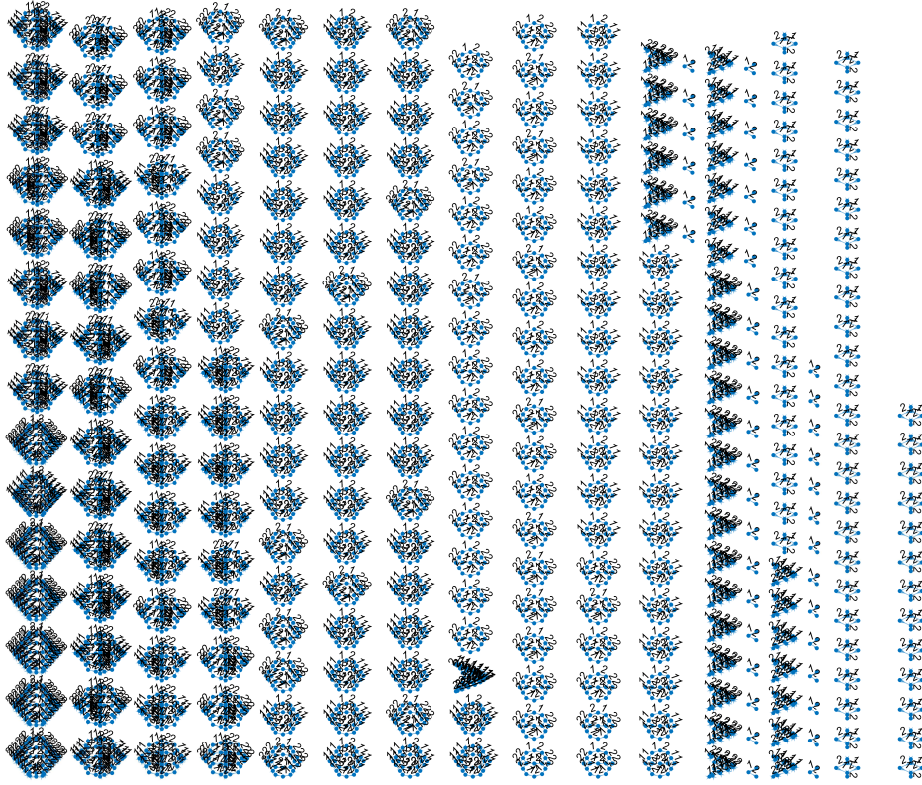
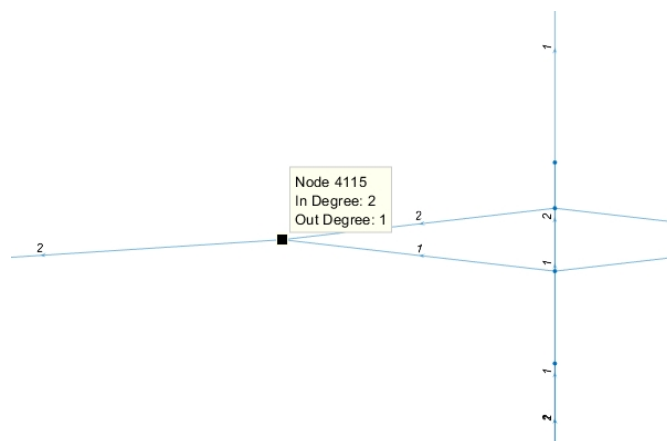


Рис. 13: Тензорная степень $n = 8$ фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$

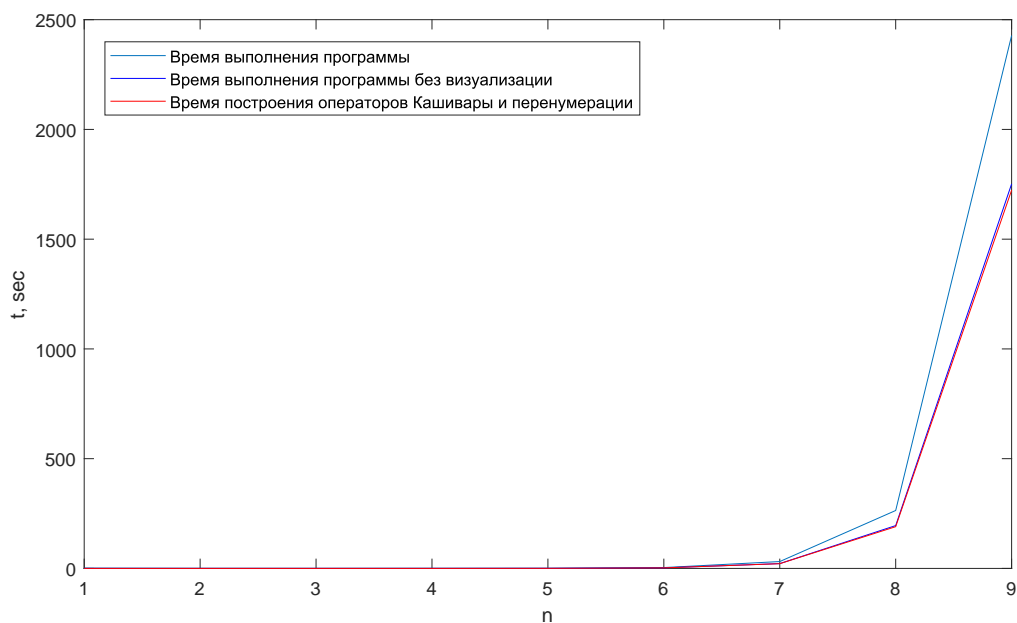
$$\begin{aligned}
 N(0,1), C &= 42 \\
 N(0,4), C &= 14 \\
 N(1,2), C &= 70 \\
 N(2,0), C &= 56 \\
 N(2,3), C &= 28 \\
 N(3,1), C &= 64 \\
 N(4,2), C &= 20 \\
 N(5,0), C &= 21 \\
 N(6,1), C &= 7 \\
 N(8,0), C &= 1
 \end{aligned}$$

Просто чтобы показать, что такие степени тоже успешно вычисляются.

В MATLAB есть интерфейс, который позволяет разглядеть всё необходимое. Например, на рисунке ниже мы видим одну из компонент тензорной степени $n = 8$. Узел под номером 4115, что равносильно вектору $e_2 \otimes e_3 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e_2$.

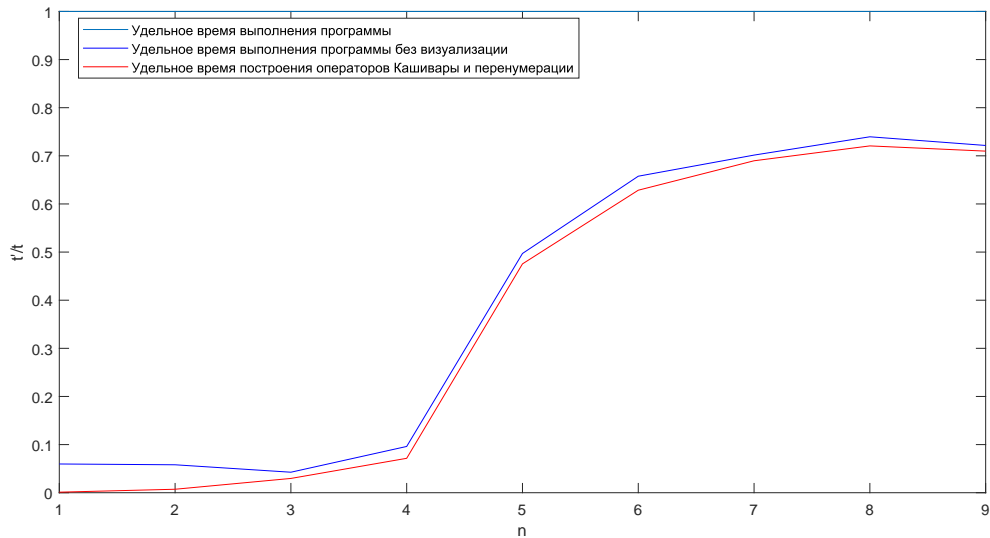


Проанализируем примерное время выполнения программы. Оценить вычислительную сложность представляется затруднительным, так как программная реализация использует множество внутренних функций MATLAB.



Видно, что основное время выполнения уходит на сведение задачи разложения к задаче построения графа. Оптимизация программы с использованием динамической генерации образов, как нам кажется, должна уменьшить

время выполнения. Проанализируем удельное время, а именно, отношение времени выполнения того или иного аспекта программы к времени выполнения всей программы.



Отсюда видно, какую часть времени занимает визуализация, а какую построение кристаллических графов.

Стоит отметить несколько особенностей данного кода. Во-первых, он допускает обобщение на тензорное произведение произвольного представления. Перемножая фундаментальные мы можем получить любое представление, а затем необходимо выделить подсектор этого произведения так, чтобы в дальнейшем рассматривать произведение только нужных нам представлений. Теория кристаллических базисов допускает такую возможность. Во-вторых, возможно обобщить этот код на алгебры Ли серии A_n . Изменение будет заключаться в том, что генераторов подалгебры Картана и операторов Кашивары будет n штук, но процедура остается той же. Однако, для решения нашей задачи нам это не понадобится.

Говоря о вещах вне программной реализации, можно отметить, что убедиться в правильности результата можно с помощью формулы Кириллова-Решетихина [20], которая показывает кратности вырождения неприводимых компонент тензорного произведения представлений.

Таким образом мы построили разложение тензорной степени фундаментального представления алгебры Ли $su(3)$ на неприводимые. Имея кристаллический граф мы можем с помощью схем Юнга построить такой базис, в котором пространство представления распадается в прямую сумму инвариантных подпространств. В этом базисе матрица аномальных размерностей будет иметь блочно-диагональный вид и мы можем найти наименьшее собственное значение гамильтониана в интересующем нас представлении. Иначе говоря, мы имеем возможность выполнить шаги 2, 3 и 4 параграфа 4.5 и осуществить проверку совпадения спектров в $su(3)$ подсекторе.

5 Заключение

Итак, в данной дипломной работе был дан краткий обзор теории представлений алгебр Ли, а также введение в квантовые группы.

Кристаллические базисы дают довольно мощный метод для решения задачи разложения тензорного произведения представлений на неприводимые компоненты и имеет ряд преимуществ перед другими методами. Можно сказать, что он сводит решение задачи к применению некоторой последовательности несложных правил, что подтверждается приведёнными в данной работе конкретными примерами вычислений. Мы предполагаем, что применение этого метода требует меньше вычислительных ресурсов, чем другие алгоритмы, а это имеет важное значение в ситуациях, когда количество узлов спиновой цепочки велико. Более того, в случае, если наши предположения верны, метод кристаллических базисов может помочь понять асимптотическое поведение коэффициентов $m(\lambda, N)$ в разложении $V^\mu \otimes V^\nu = \bigoplus_\lambda m(\lambda, N) V^\lambda$ при стремлении $N \rightarrow \infty$. Однако, этот метод задействует достаточно много теоретических сведений, которые и были изложены в дипломной работе.

Также мы дали краткий обзор модели спиновой цепочки и алгебраического анзаца Бёте в случае алгебры Ли sl_2 . Множество понятий, что были задействованы при нахождении спектра данной модели были использованы при исследовании соответствия между теорией $\mathcal{N} = 4$ SYM и IIB теорией струн в пространстве $AdS_5 \times S^5$. Помимо предоставления необходимых сведений по AdS/CFT соответствию, мы проследовали статье [30] и показали эквивалентность между матрицей аномальных размерностей односледовых скалярных операторов в теории $\mathcal{N} = 4$ SYM в однопетлевом приближении и гамильтонианом некоторой спиновой цепочки. Это было использовано для проверки соответствия между упомянутыми выше теориями. Мы изложили алгоритм осуществления этой проверки и предложили программную реализацию для выполнения одного из шагов.

Мы написали собственную реализацию программы поиска кристаллических базисов для N -кратного тензорного произведения фундаментальных представлений алгебры Ли $su(3)$. Также был представлен анализ эффективности выполнения программы. Стоит сказать, что аналогов предложенной реализации на данный момент нет, поэтому она актуальна и имеет принципиальную новизну не только в контексте решения физических задач, но и математических. Отметим, что существует пакет для Maple, в котором алгоритм решения похожей задачи реализован. С документацией можно ознакомиться в работе [22]. Однако, он не работает с тензорными степенями представлений. Более того, построение кристаллов может быть осуществлено пакетом CrystalView, описание работы которого можно посмотреть в статье [23]. Тем не менее, CrystalView не имеет возможности рассматривать тензорные произведения представлений.

Далее программную реализацию можно использовать для изучения AdS/CFT соответствия двух вышеупомянутых теорий. С помощью найденного программой кристаллического базиса можно диагонализировать гамильтониан и получить спектр аномальных размерностей односледовых скалярных операторов. Далее мы описали, как можно их сопоставить со спектром некоторой замкнутой струны со спинами (J_1, J_2, J_3) в IIB теории струн в пространстве $AdS_5 \times S^5$. Совпадение предсказаний со стороны обеих теорий

будет означать, что гипотеза прошла очередной тест на соответствие.

Стоит отметить, что вместо использования аппарата кристаллических базисов для проверки соответствия можно было воспользоваться термодинамическим анзацем Бёте. Однако, тем самым мы бы потеряли возможность рассматривать другие калибровочно инвариантные величины, задача диагонализации соответствующих матриц аномальных размерностей которых тоже является актуальной. Кристаллические базисы предлагают довольно мощный способ работы безотносительно теории струн, когда нет необходимости брать предел $J \rightarrow \infty$. Например, мы имеем возможность находить спектр аномальных размерностей других операторов теории $\mathcal{N} = 4$ *SYM*, что может быть использовано даже для поиска констант перенормировок. Мы также могли бы прибегнуть к использованию спектральной кривой, но её построение включает в себя использование формализма Лакса. Это представляет из себя нетривиальную задачу для объектов категории \mathcal{O}_{int} , поэтому мы предполагаем, что использование кристаллических базисов в произвольном случае может оказаться эффективным.

Список литературы

- [1] Винберг Э. Б.; Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011
- [2] Ляховский В. Д., Болохов А. А.; Группы симметрии и элементарные частицы. М.: УРСС, 2002
- [3] Голод П. И., Климык А. У.; Математические основы теории симметрий. М.: rcd, 2001
- [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли». М., 1962
- [5] Понтрягин Л. С.; Непрерывные группы. М.: 1973
- [6] Джекобсон Н.; Алгебры Ли. М., 1964
- [7] Желобенко Д. П.; Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука 1970
- [8] Серр Ж.-П.; Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969
- [9] Klimyk A.U.; Multiplicities of weights of representations and multiplicities of representations of semisimple Lie algebras. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 177 (1967) 1001–1004
- [10] Littlewood D.E.; Richardson, A. R. (1934), Group Characters and Algebra. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, The Royal Society, 233 (721–730): 99–141
- [11] Littelmann P.; (1995), Paths and root operators in representation theory. Ann. of Math., Annals of Mathematics, 142 (3): 499–525
- [12] Hong, Jin; Kang, Seok-Jin (2002), Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases, Graduate Studies in Mathematics, 42, American Mathematical Society
- [13] Van Leeuwen, M. A. A. (1994). LiE, a software package for Lie group computations. Euromath Bull, 1(2), 83-94.
- [14] Nazarov, A. (2012). Affine. m—Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras. Computer Physics Communications, 183(11), 2480-2493.
- [15] Feger, R., Kephart, T. W. (2015). LieART—a Mathematica application for Lie algebras and representation theory. Computer Physics Communications, 192, 166-195.
- [16] Stembridge, J. R. (2001). Part 1. Computational Aspects of Root Systems, Coxeter Groups, and Weyl Characters (pp. 1-38). Mathematical Society of Japan.
- [17] Lusztig G., Quantum deformation of a certain simple modules over enveloping algebras, Adv. Math. 70 (1988): 237-249

- [18] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М. : Наука, 1978.
- [19] Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордона и высшие представления, Зап. научн. семин. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. — 1981. — т. 101. — С. 101-110.
- [20] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, Formulas for multiplicities of occurrence of irreducible components in the tensor product of representations of simple lie algebras, Journal of Mathematical Sciences, 1996, 80:3, 1768–1772
- [21] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-Бакстера, Доклады АН СССР. — 1985. — т. 283, № 5. — С. 1060-1064.
- [22] Joyner, D., Martin, R. (1998). A Maple package for the decomposition of certain tensor products and restrictions of representations using crystal graphs. ACM SIGSAM Bulletin, 32(2), 19-22.
- [23] P. M. Sternberg, Applications of Crystal Bases to Current Problems in Representation Theory, arXiv:math/0610704v2 [math.QA] 30 Nov 2006
- [24] Faddeev, L. D. (2016). How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models. In Fifty Years of Mathematical Physics: Selected Works of Ludwig Faddeev (pp. 370-439).
- [25] Ramallo, A. V. (2015). Introduction to the AdS/CFT correspondence. In Lectures on Particle Physics, Astrophysics and Cosmology (pp. 411-474). Springer, Cham.
- [26] Zaffaroni, A. (2000). Introduction to the AdS-CFT correspondence. Classical and Quantum Gravity, 17(17), 3571.
- [27] Цвибах Б., Начальный курс теории струн. М.: Едиториал УРСС, 2011
- [28] Полчинский Д., Теория струн, том 1, Cambridge University Press, 2005
- [29] Cachazo, Lectures on String Theory, <http://www.perimeterscholars.org/337.html>, Perimeter Institute, 2011
- [30] Minahan, J. A., Zarembo, K. (2003). The Bethe-ansatz for N=4 super Yang-Mills. Journal of High Energy Physics, 2003(03), 013.
- [31] Frolov, S., Tseytlin, A. A. (2003). Rotating string solutions: AdS/CFT duality in non-supersymmetric sectors. Physics Letters B, 570(1-2), 96-104.
- [32] Beisert, N., Staudacher, M., Frolov, S., Tseytlin, A. A. (2003). Precision spectroscopy of AdS/CFT. Journal of High Energy Physics, 2003(10), 037.
- [33] Kristjansen, C. (2004). Three-spin strings on $AdS_5 \times S^5$ from N=4 SYM. Physics Letters B, 586(1-2), 106-116.
- [34] Arutyunov, G., Russo, J., Tseytlin, A. A. (2004). Spinning strings in $AdS_5 \times S^5$: New integrable system relations. Physical Review D, 69(8), 086009.
- [35] Arutyunov, G. (2003). G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, and AA Tseytlin, Nucl. Phys. B671, 3 (2003). Nucl. Phys., 671, 3.

- [36] Frolov, S., Tseytlin, A. A. (2003). Quantizing three-spin string solution in $AdS_5 \times S^5$. Journal of High Energy Physics, 2003(07), 016.
- [37] Beisert, N., Staudacher, M., Minahan, J. A., Zarembo, K. (2003). Stringing spins and spinning strings. Journal of High Energy Physics, 2003(09), 010.